1016. Der Sprung vom 10-m-Turm kann nur dann gefährlich werden, wenn man mit Anlauf springt. Dadurch wird der Sprung zu einem waagerechten Wurf und man kann im schlimmsten Fall bis zum Beckenrand springen.
Mit welcher Geschwindigkeit muss man nun für diesen Ernstfall von der Plattform springen, also wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit mindestens sein?
Für den waagerechten Wurf gilt:

$$y=-\frac{g}{2\cdot v_0^2}\cdot x^2$$

Die Gleichung wird erst mal nach der gesuchten Anfangsgeschwindigkeit umgestellt:

$$v_0^2=-\frac{g}{2\cdot y}\cdot x^2$$

$$v_0=\sqrt{-\frac{g}{2\cdot y}\cdot x^2}$$

y ist die Höhe des Turmes. Da die Bewegung nach unten geht, wird der Wert negativ eingetragen. Damit entfällt in der Berechnung das Minus unter der Wurzel.
X ist die Wurf- oder hier die Sprungweite. Das Becken ist 18 m lang. Davon werden noch die 3 m abgezogen, die die Plattform über den Beckenrand ragt.
Damit kann nun die Geschwindigkeit berechnet werden:

$$v_0=\sqrt{-\frac{9{,}81\frac{m}{s^2}}{2\cdot -10\,m}\cdot (15\,m)^2}$$

$$v=10{,}5\frac{m}{s}$$

$$v=37{,}8\frac{km}{h}$$

Der Springer müsste also mit $10{,}5\frac{m}{s}$ vom Turm springen, um gerade so den gegenüberliegenden Rand zu erreichen. Wie wahrscheinlich ist das, dass ein Springer das schafft?
Der Weltrekord für den 100-m-Lauf liegt seit 2009 bei 9,58 s. Das entspricht einer Geschwindigkeit von $10{,}4\frac{m}{s}$. Vom Turm müsste man noch etwas schneller sein. Durch eine wissenschaftliche Argumentation können die Bedenken hoffentlich zerstreut werden.

Nun zum Einwand des Physikers. Die einfachste Möglichkeit, das zu untersuchen, ist die Berechnung einer Sprungweite bei einem Winkel, der größer als 0° ist.
Die Wurfparabel lautet:

$$y=\tan\alpha\cdot x-\frac{g}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2\alpha}\cdot x^2$$

Als Startgeschwindigkeit v_0 verwendet man die oben berechneten 10,5 m/s, y ist die Turmhöhe mit 10 m und als Absprungwinkel wählt man z.B. 10°.
Die Weite des Sprunges ist x.
Nun gibt es verschiede Möglichkeiten, die Sprungweite anzugeben. Sie lässt sich z.B. mit einem Solver (GTR) bestimmen.

Da erhält man für die oben angegeben Größen eine Sprungweite von 16,8 m! Der Physiker hat Recht!
Nun wäre die nächste Frage, bei welchem Sprungwinkel nach oben die Sprungweite am größten ist. Dann kann man für diesen Winkel die maximale Absprunggeschwindigkeit berechnen und entscheiden, ob der Sprungturm wieder abgerissen werden muss.

Für die Berechnung des Winkels für die größte Sprungweite gibt es verschiedene Möglichkeiten der Simulation. Hier soll die Variante mit einer Tabellenkalkulation (Excel) beschrieben werden. Die Kalkulationen von OpenOffice oder LibreOffice bieten es ebenfalls an.

Zuerst braucht man eine Formel, mit der die Wurfweite berechnet wird. Dazu muss die Wurfparabel nach der Wurfweite x umgestellt werden. Das geht aber so einfach nicht, da die gewünschte Größe sowohl linear als auch quadratisch vorkommt. Das wird die Lösung einer quadratischen Gleichung. Die Wurfparabel wird als zuerst in die Normalform überführt:

$$y = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

$$0 = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 - y$$

$$0 = \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 - \tan\alpha \cdot x + y$$

Um die Normalform zu erhalten, muss jeder Summand mit

$$h = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}{g}$$

multipliziert werden. Zur Vermeidung von Schreibarbeit und der leichteren Eingabe in Excel wählt man ein Hilfsvariable h. (Max Planck lässt grüßen)
Die Normalform sieht nun so aus:

$$0 = x^2 - h \cdot \tan\alpha \cdot x + h \cdot y$$

Die Lösung dieser quadratischen Funktion sieht dann so aus:

$$x_{1/2} = \frac{h \cdot \tan\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h \cdot \tan\alpha}{2}\right)^2 - h \cdot y}$$

In der Excel-Tabelle sehen die Werte und Formeln dann so wie in der Abbildung aus.
Der Winkel muss in Bogenmaß umgerechnet werden.
Um die Eingabe noch übersichtlicher zu gestalten, wird in Zelle B(8) ein weiterer Zwischenwert berechnet.

	A	B	C
1	y	-10	
2	v	10,5	
3	alpha	0	Grad
4	alpha	=BOGENMASS(B3)	Bogensekunden
5			
6			
7	h	=2*B2^2*COS(B4)^2/9,81	
8	h*tan(alpha)/2	=B7*TAN(B4)/2	
9	x	=B8+WURZEL(B8^2-B7*B1)	m
10			
11			

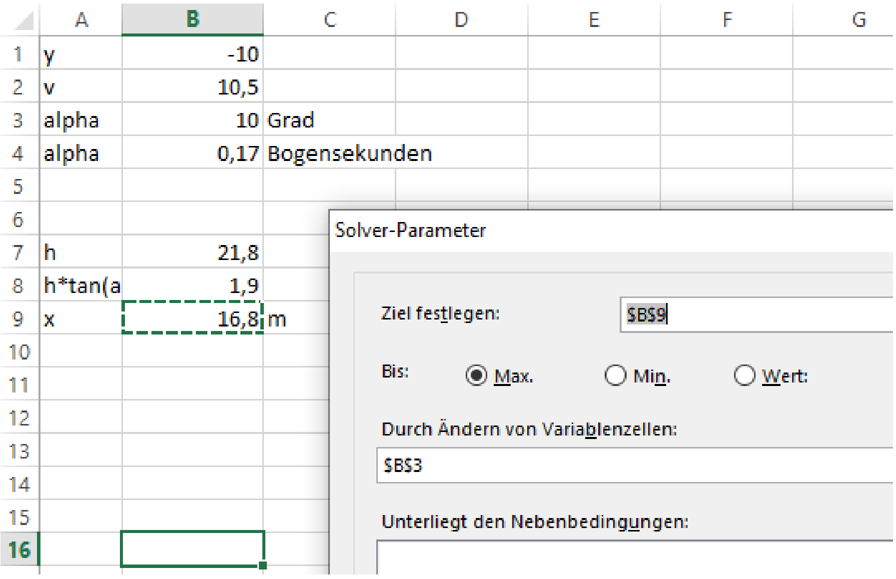
Die berechneten Werte sehen dann wie in der Abbildung aus. Bei einem Winkel von 0° (waagerechter Wurf) erhält man, wie erwartet, die 15,0 m.

	A	B	C
1	y	-10	
2	v	10,5	
3	alpha	0	Grad
4	alpha	0	Bogensekunden
5			
6			
7	h	22,5	
8	h*tan(alpha)/2	0	
9	x	15,0	m
10			

Aber schon ein Absprungwinkel von 10° liefert eine größere Wurfweite.

	A	B	C	D
1	y	-10		
2	v	10,5		
3	alpha	10	Grad	
4	alpha	0,17	Bogensekunden	
5				
6				
7	h	21,8		
8	h*tan(a	1,9		
9	x	16,8	m	
10				

Bei welchen Winkel ist nun der x-Wert maximal?
Da hilft die Zielwertsuche weiter: Daten, Solver…
Als Ziel trägt man die Zelle mit der x-Berechnung ein und die Zelle mit alpha in das Feld, das geändert werden soll.



Als Ergebnis erhält man 31°. Damit würde man 18,7 m weit fliegen und außerhalb des Beckens aufschlagen.

Fazit: der Turm darf nicht benutzt werden.

	A	B	C
1	y	-10	
2	v	10,5	
3	alpha	31,0	Grad
4	alpha	0,54	Bogensekunden
5			
6			
7	h	16,5	
8	h*tan(a	5,0	
9	x	18,7	m
10			

Da kommt ein anderer Physiker des Weges und meint, dass man auf den 5 m des Sprungbrettes nie auf die Geschwindigkeit von 10,5 m/s kommen kann. Das gibt ja wieder Hoffnung, dass der Turm doch noch benutzt werden kann.

Wie groß kann den die Beschleunigung eines Menschen beim Start zu einem Sprint sein? Wenn man einen Wert von 2 m/s² annimmt, kommt man auf den 5 m Weg auf eine Endgeschwindigkeit von 4,5 m/s. Gibt man noch etwas drauf, kommt man auf 5 m/s.
Was sagt die Zielwertsuche dazu?
Die maximale Sprungweite wird jetzt bei 18,6° erreicht und beträgt nur noch 7,6 m. Das ist ungefährlich und der Turm darf nun doch benutzt werden.

	A	B	C
1	y	-10	
2	v	5	
3	alpha	18,6	Grad
4	alpha	0,32	Bogensekunden
5			
6			
7	h	4,6	
8	h*tan(a	0,8	
9	x	7,6	m