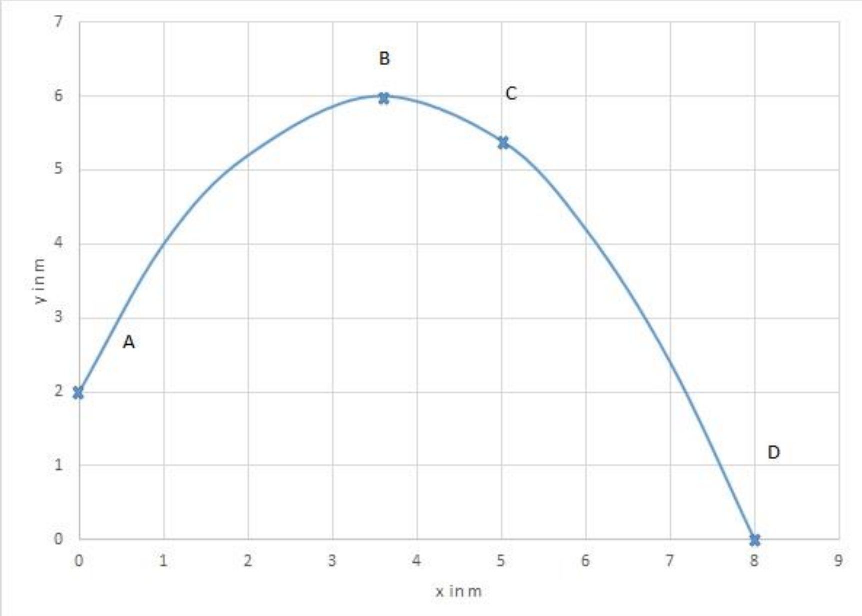
Aufgaben zum schrägen Wurf

1014. (LK 2019, Hilfsmittelfrei)
Ein Körper führt reibungsfrei einen schrägen Wurf aus und durchläuft nacheinander die Orte A, B, C und D mit der jeweiligen Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$. Am Ort B hat der Körper die maximale Höhe. Die Abbildung zeigt das zugehörige y(x)-Diagramm.



a) Ordnen Sie die kinetischen Energie $E_{kin,A}$, $E_{kin,B}$, $E_{kin,C}$ und $E_{kin,D}$ des Körpers der Größe nach. Beginnen Sie mit dem größten Betrag.
b) Die Bewegung des Körpers vom Ort A zum Ort D dauert 2,0 s. Berechnen Sie den Betrag der Komponente $\vec{v}_x$ der Bahngeschwindigkeit.
c) Für den Ort B gilt $\vec{v}_x = \vec{v}$. Begründen Sie, dass diese Aussage wahr ist.
d) Tragen Sie den Vektorpfeil $\vec{v}_x$ für den Ort C in die Abbildung ein. Ermitteln Sie zeichnerisch den Betrag der Bahngeschwindigkeit für diesen Ort.

478. Zur Gartenbewässerung wird in einem Behälter, der 3000 l fasst, Regenwasser aufgefangen und mit Hilfe einer Pumpe und einem Halbzollschlauch zu den bedürftigen Pflanzen geleitet. Hält man den Schlauch in Höhe des Erdbodens und spritzt schräg nach oben, trifft der Strahl in maximal 63 cm Entfernung auf den Boden. Wie viel Liter Wasser kommen pro Minute zu den Pflanzen?
(Der störende Einfluss des Luftwiderstandes wird vernachlässigt, so dass die Bahn des Wasserstrahls eine Wurfparabel ist)

486. Eine Kugel soll auf in einer 200 m entfernten Burg den Pulverturm in 20 m Höhe treffen. Die Kanone schießt die Kugel mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 70 m/s ab. Wie groß muss der Abschusswinkel sein?
Oder: Ein Schneeball soll ein kleines Fenster treffen, dass sich in einem 2 m entfernten Haus in einer Höhe von 4 m über der Abwurfstelle befindet. Die Abwurfgeschwindigkeit beträgt 12 m/s. Wie groß muss der Abwurfwinkel sein?

929. Aus einem Gartenschlauch kommt das Wasser mit 5,0 m/s herausgeschossen. Der Schlauch wird von dem Gärtner in 1,0 m Höhe gehalten.
Zeigen Sie so ausführlich wie möglich, dass die maximale Spritzweite NICHT bei einem Winkel von 45° erreicht wird.

261. Ein Federwurfgerät enthält eine Schraubenfeder (Federkonstante D = 120 Nm^{-1}), deren freies und arretierbares Ende beim Zusammendrücken der Feder den Federspannweg 15 cm zurückgelegt hat. Die Längsachse der Feder mit ihrer Führung bildet mit der Horizontalen den Winkel 70°.
Auf dem oberen Ende der Feder, welches zunächst arretiert ist, ruht eine Stahlkugel mit dem Durchmesser 1,0 cm. Durch Freigabe des arretierten Endes der Feder tritt die herausgeschleuderte Kugel im aufsteigenden Teil ihrer Bahn durch eine Öffnung, die sich in einer senkrechten Wand befindet und um 17,6 m höher liegt als die Abwurfstelle.
Hinweis: Reibungsfreie Bewegung wird angenommen.
a) Berechnen Sie die Kraft, mit der der gespannte Zustand der Feder im Gerät hergestellt wurde.
b) Mit welcher Geschwindigkeit verlässt die Kugel das Gerät?
c) In welcher Entfernung von der senkrechten Wand muss die Mündung des Federwurfgerätes aufgestellt werden?
d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die kinetische Energie der Kugel beim Passieren der Öffnung, die sich in der senkrechten Wand befindet.
e) Wie hoch über der Abwurfstelle liegt der Gipfelpunkt der Flugbahn der Kugel, wenn sich die Kugel nach dem Passieren der Öffnung ungehindert weiterbewegen kann?
f) In welcher Entfernung von der Abwurfstelle trifft die Kugel am Boden auf, wenn sich die Abwurfstelle in gleicher Höhe befindet?

Lösungen
1014.
a) Die Geschwindigkeit setzt sich aus dem Anteil in x-Richtung und dem Anteil in y-Richtung verkoriell zusammen.
Während der gesamten Bewegung bleibt der Anteil der Geschwindigkeit in x-Richtung konstant.
Im Punkt B ist der Anteil der Geschwindigkeit in y-Richtung 0, da der Körper genau im Umkehrpunkt seiner Bahn ist. Desahlb ist die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie am kleinsten.
Der Betrag der Geschwindigkeit in y-Richtung hängt von der Höhe ab. Je höher der Körper ist, um so kleiner ist der Geschwindigkeitsanteil in y-Richtung.
Damit ist die kinetische Energie im Punkt D am größten. Es ergibt sich folgende Reihenfolge:
$E_{kin,D} > E_{kin,A} > E_{kin,C} > E_{kin,B}$
b) Die Bewegung in x-Richtung ist gleichförmig, es gilt also

$$v = \frac{s}{t}$$

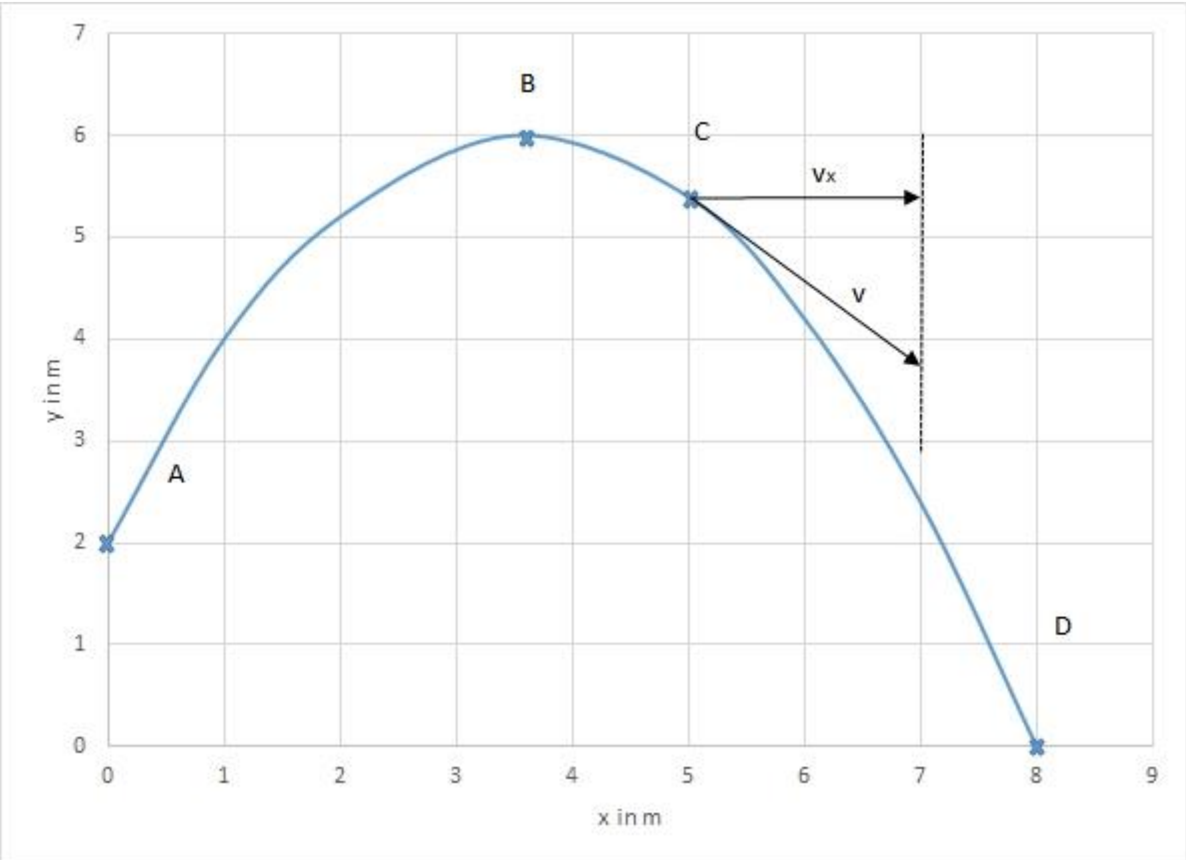
Der Körper benötigt für die 8 m genau 2 s, so dass seine Geschwindigkeit in x-Richtung

$$\vec{v}_x = 4{,}0\,\frac{m}{s}$$

beträgt.

c) Die Geschwindigkeit setzt sich immer aus dem Anteil in x-Richtung und dem Anteil in y-Richtung zusammen. Im Punkt B hat der Körper den höchsten Punkt seiner Bahn erreicht und die Geschwindigkeit in y-Richtung ist 0. Deshalb ist die Gesamtgeschwindigkeit genau so groß wie die Geschwindigkeit in x-Richtung.

d)



Am Punkt C wird in einem entsprechenden Maßstab der Vektorpfeil eingezeichnet. Der Vertorpfeil für die Bahngeschwindigkeit wird dann tangential an C angetragen. Man erhält eine Geschwindigkeit von etwa 5 m/s.

478.

geg.:	$d = \frac{1}{2}"$ $s_w = 0{,}63\,m$ $\alpha = 45°$	ges.:	V
Lösung:	Die bei Durchmessern von Rohren und Schläuchen übliche Angabe in Zoll muss in cm umgerechnet werden. Es gilt: $1\,Zoll = 1" = 1\,inch = 25{,}4\,mm$ Damit hat ein Halbzollschlauch einen Durchmesser von 12,7 mm. Zur Berechnung der Menge, die in einer Minute aus dem Schlauch läuft, muss man die Austrittsgeschwindigkeit wissen. Damit kann berechnet werden, wie viel Meter Schlauch in einer Minute leerlaufen. Über den Durchmesser wird noch die Querschnittsfläche des Schlauches berechnet und damit erhält man das gesuchte Volumen. Der Flug des Wasserstrahls kann als schräger Wurf betrachtet werden. Da Abwurf- und Auftreffstelle in gleicher Höhe liegen, erreicht man bei einem Abwurfwinkel von 45° die maximale Weite. Die Gleichung zur Beschreibung der Wurfparabel lautet: $y = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$ In dieser Gleichung sind alle Größen außer die Abwurfgeschwindigkeit bekannt. Also muss nach dieser umgestellt werden. Da die Abwurf- und Auftreffstelle gleich sind, ist y=0. $y = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$ $y - \tan\alpha \cdot x = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$ $\frac{x^2}{y - \tan\alpha \cdot x} = -\frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}{g}$ $\frac{x^2 \cdot g}{(y - \tan\alpha \cdot x) \cdot 2 \cdot \cos^2\alpha} = -v_0^2$ $v_0 = \sqrt{-\frac{x^2 \cdot g}{(y - \tan\alpha \cdot x) \cdot 2 \cdot \cos^2\alpha}}$ $v_0 = \sqrt{-\frac{0{,}63^2\,m^2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{(0\,m - \tan 45° \cdot 0{,}63\,m) \cdot 2 \cdot \cos^2 45°}}$ $v_0 = 2{,}48\,\frac{m}{s}$		

	Das Wasser spritzt also mit 2,48 m/s oder etwa 8,94 km/s aus dem Schlauch. In einer Minute sind das 149 m Schlauch, die leer laufen. Der Querschnitt des Schlaues ist kreisrund, so dass er sich wir folgt berechnen lässt: $A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$ $A = \frac{\pi}{4} \cdot (12{,}7 \cdot 10^{-3}\,m)^2$ $A = 1{,}27 \cdot 10^{-4}\,m^2$ $A = 1{,}27\,cm^2$ Multipliziert man diese Fläche (in Metern!) mit der Länge der Wassersäule aus der ersten Berechnung, erhält man die Wassermenge, die in einer Minute aus dem Schlauch läuft: $V = A \cdot l$ $V = 1{,}27 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 149\,m$ $V = 0{,}0189\,m^3$ $V = 18{,}9\,l$ Hinweis: Die Aufgaben lässt sich auch lösen, wenn man die Gleichung für die Wurfweite beim schrägen Wurf verwendet. Sie leitet sich ja aus der allgemeinen Gleichung her.
Antwort:	In der Minute werden 19 Liter Wasser gepumpt. Das sind in der Stunde etwa 1140 l.

486.

geg.:	$s = 200\,m$ $h = 20\,m$ $v_0 = 70\,\frac{m}{s}$	ges.:	α

Lösung:	Die Bewegungsgleichung für den schrägen Wurf in x-Richtung (=s) lautet: $s = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$ und in y-Richtung (=h) $h = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$ Mit der letzen Gleichung erhält man: $h = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$ $h + \frac{g}{2} \cdot t^2 = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha$ $\sin\alpha = \frac{h}{v_0 \cdot t} + \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t}$ $\sin\alpha = \frac{2 \cdot h}{2 \cdot v_0 \cdot t} + \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t}$ $\sin\alpha = \frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t}$ Da in der ersten Gleichung aber der Cosinus gefordert ist, muss man umschreiben: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t}\right)^2}$

Das setzt man in die erste Gleichung ein:

$$s = v_0 \cdot t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t} \right)^2}$$

und stellt es nach t um.

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t} \right)^2 \right)$$

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 - \frac{v_0^2 \cdot t^2 \cdot \left(2 \cdot h + g \cdot t^2\right)^2}{\left(2 \cdot v_0 \cdot t\right)^2}$$

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 - \frac{\left(2 \cdot h + g \cdot t^2\right)^2}{4}$$

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 - \left(\frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2} \right)^2$$

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 - \left(h + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \right)^2$$

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 - h^2 - h \cdot g \cdot t - \frac{1}{4} g^2 \cdot t^4$$

$$s^2 + h^2 = t^2 \cdot \left(v_0^2 - h \cdot g - \frac{1}{4} g^2 \cdot t^4 \right)$$

Ja, wie weiter? Man wählt jetzt:

$$t^2 = x$$

und kommt zu einer quadratischen Gleichung:

$$s^2 + h^2 = v_0^2 \cdot x - h \cdot g \cdot x - \frac{1}{4} \cdot g^2 \cdot x^2$$

$$0 = -\frac{1}{4} \cdot g^2 \cdot x^2 + \left(v_0^2 - h \cdot g\right) \cdot x - \left(s^2 + h^2\right)$$

Nun könnte man das in eine Normalform umwandeln und lösen. Man kann aber auch erst mal Zahlen einsetzen. Das vereinfacht gewaltig:

$$0 = -24{,}06\,x^2 + 4703{,}8\,x - 404000$$

$$0 = x^2 - 195{,}5\,x + 1679{,}1355$$

$$x_{1/2} = 97{,}7515 \pm \sqrt{9555{,}347 - 1679.1355}$$

$$x_{1/2} = 97{,}7515 \pm 88{,}748$$

$$x_1 = 186{,}4995$$

$$x_2 = 9{,}01$$

Das sind aber noch nicht die gesuchten Zeiten. Die Zeiten ergeben sich aus:

$$t = \sqrt{x}$$

$$t_1 = 13{,}6565\,s$$

$$t_2 = 3{,}001 s$$

	Mit diesen Zeiten kann man über die erste Gleichung die Abschusswinkel berechnen: $s = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$ $\cos\alpha = \frac{s}{v_0 \cdot t}$ $\alpha_1 = 77{,}92°$ $\alpha_2 = 17{,}8°$ Schnell noch die Probe. Wenn alles richtig war, muss sich mit der zweiten Gleichung die Höhe von 20 m berechnen lassen: $h = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$ $h_1 = 20{,}0\,m$ $h_2 = 20{,}04\,m$ Stimmt und fertig.
Antwort:	Die Kugel kann unter einem Winkel von 77.92° oder von 17,8° abgeschossen werden.
	für den Schnellball: $0 = -24{,}06\,x^2 + 104{,}76\,x - 20$ $0 = x^2 - 4{,}35\,x + 0{,}83$ $x_{1/2} = 2{,}175 \pm \sqrt{4{,}73 - 0{,}83}$ $x_{1/2} = 2{,}175 \pm 1{,}975$ $x_1 = 4{,}15$ $x_2 = 0{,}2$ $t = \sqrt{x}$ $t_1 = 2{,}037\,s$ $t_2 = 0{,}447\,s$ $s = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$ $\cos\alpha = \frac{s}{v_0 \cdot t}$ $\alpha_1 = 85{,}3°$ $\alpha_2 = 68{,}1°$

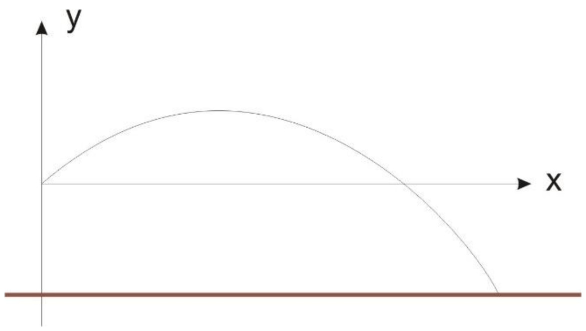
929. Eine Lösungsmöglichkeit:

Die Öffnung des Schlauchs befindet sich im Nullpunkt des Koordinatensystems.
Der gesuchte Auftreffpunkt liegt 1,0 m unterhalb dieses Punktes, also im negativen Bereich.

Die maximale Schussweite lässt sich bei Vernachlässigung der Luftreibung mit der Gleichung für den schrägen Wurf ermitteln. Die Parabel wird mit

$$y = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

beschrieben.



Diese Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Abstand vom Abschusspunkt (x) und dem Abstand von der X-Achse (y).
Man stellt die Gleichung nach x um und fragt, wie groß die Wurfweite bei 45° ist.

$$y = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

$$0 = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \tan\alpha \cdot x - y$$

$$0 = \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 - \tan\alpha \cdot x + y$$

$$0 = x^2 - \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \tan\alpha}{g} \cdot x + \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot y}{g}$$

Das ist die Normalform einer quadratischen Gleichung, die entsprechend gelöst wird:

$$x_{1/2} = \frac{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \tan\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \tan\alpha}{g}\right)^2 - \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot y}{g}}$$

Und jetzt für 45° (die Einheiten wurden weggelassen):

$$x_{1/2} = \frac{25 \cdot \cos^2 45° \cdot \tan 45}{9{,}81} \pm \sqrt{\left(\frac{25 \cdot \cos^2 45° \cdot \tan 45}{9{,}81}\right)^2 - \frac{2 \cdot 25 \cdot \cos^2 45° \cdot (-1)}{9{,}81}}$$

$$x_{1/2} = 1{,}27 \pm \sqrt{1{,}62 + 2{,}55}$$

$$x_{1/2} = 1{,}27 \pm 2{,}04$$

$$x_1 = 3{,}31$$

$$x_2 = -0{,}8$$

Beim Abwurfwinkel von 45° erhält man eine Wurfweite von 3,31 m.
Jetzt wird die Wurfweite für einen kleineren Winkel berechnet, z.B. 43°:

$$x_{1/2}=\frac{25\cdot\cos^2 43°\cdot\tan 43}{9,81}\pm\sqrt{\left(\frac{25\cdot\cos^2 43°\cdot\tan 45}{9,81}\right)^2-\frac{2\cdot 25\cdot\cos^2 43°\cdot(-1)}{9,81}}$$

$$x_{1/2}=1,27\pm\sqrt{1,62+2,73}$$

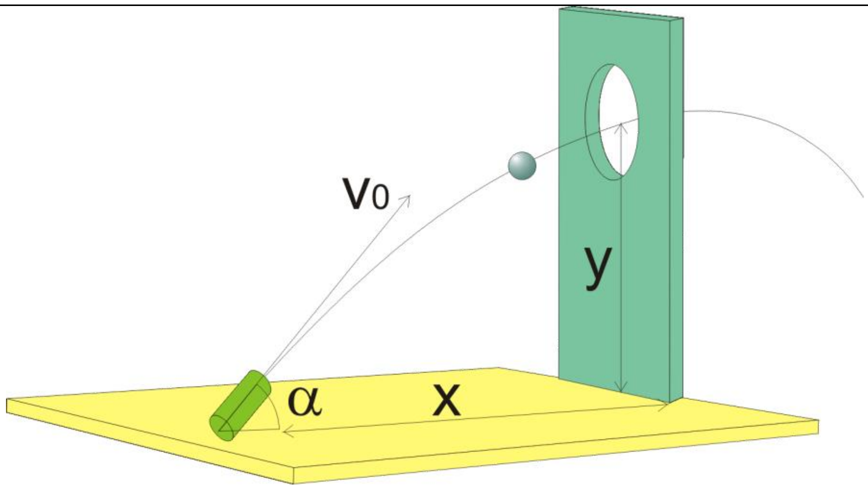
$$x_{1/2}=1,27\pm 2,09$$

$$x_1=3,36$$

Die Wurfweite bei 43° ist demnach größer als die bei 45°.
Wenn man die Weite für einen größeren Winkel berechnet, erhält man bei 47° eine Weite von 3,27 m.

geg.:	$D=120\,\frac{N}{m}$ $s=0,15\,m$ $\alpha=70°$ $d_K=1\cdot 10^{-2}\,m$ $\rho=7,8\cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}$ $h=17,6\,m$	ges.:	a) F b) v

Lösung:	a) $F = D \cdot s$ $F = 120\,\frac{N}{m} \cdot 0{,}15\,m$ $F = 18\,N$ b) Die gespannte Feder besitzt Spannenergie, die beim Abschuss vollständig in die kinetische Energie der Kugel umgewandelt wird. Damit gilt: $E_{spann} = E_{kin}$ $\frac{D}{2} \cdot s^2 = \frac{m}{2} \cdot v^2$ $v = \sqrt{\frac{D \cdot s^2}{m}}$ Die Masse kann aus der Dichte von Stahl und dem Durchmesser der Kugel berechnet werden: $\rho = \frac{m}{V}$ $m = \rho \cdot V$ $m = \rho \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3$ Damit wird die Geschwindigkeit: $v = \sqrt{\frac{D \cdot s^2}{\rho \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3}}$ $v = \sqrt{\frac{6 \cdot D \cdot s^2}{\rho \cdot \pi \cdot d^3}}$ $v = \sqrt{\frac{6 \cdot 120\,\frac{N}{m} \cdot 0{,}15^2\,m^2}{7{,}8 \cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3} \cdot \pi \cdot \left(1 \cdot 10^{-2}\,m\right)^3}}$ $v = 25{,}7\,\frac{m}{s}$ c)



Es kommt die Gleichung für die Wurfparabel zur Anwendung:

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan \alpha$$

Die muss nach der gesuchten Größe x aufgelöst werden, was auf die Lösung einer quadratischen Gleichung hinausläuft.

$$0 = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan \alpha - y$$

$$0 = x^2 - \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \tan \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{g} \cdot x + \frac{2 \cdot y \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g}$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt zwei Werte:

$$x_1 = 7{,}8\,\text{m}$$

$$x_2 = 36{,}4\,\text{m}$$

Der erste Wert bezieht sich auf den aufsteigenden Teil der Bahn, der zweite auf den absteigenden Teil.

d) Die Geschwindigkeit eines Körpers beim schrägen Wurf in Abhängigkeit von seiner Flugzeit berechnet sich nach

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2 - 2 v_0 \cdot g \cdot t \cdot \sin \alpha}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit und der Abschusswinkel sind bekannt, die Flugzeit bis zum Loch kennt man aber noch nicht.

Da die Entfernung in x-Richtung aber soeben zu 7,8 m berechnet wurde, kann daraus die Flugzeit berechnet werden:

	$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$ $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$ $t = \frac{7{,}8\,m}{25{,}7\frac{m}{s} \cdot \cos 70°}$ $t = 0{,}89\,s$ Damit kann nun die gesuchte Geschwindigkeit berechnet werden: $v = \sqrt{\left(25{,}7\frac{m}{s}\right)^2 + \left(9{,}81\frac{m}{s^2}\right)^2 \cdot (0{,}89\,s)^2 - 2 \cdot 25{,}7\frac{m}{s} \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}89\,s \cdot \sin 70°}$ $v = 17{,}7\frac{m}{s}$ Die kinetische Energie ist dann einfach $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$ $E_{kin} = \rho \cdot \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot d^3 \cdot v^2$ $E_{kin} = 7{,}8 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \left(1 \cdot 10^{-2}\,m\right)^3 \cdot \left(17{,}7\frac{m}{s}\right)^2$ $E_{kin} = 0{,}64\,J$ e) Die Wurfhöhe berechnet sich nach der Gleichung $s_h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g}$ Es ist alles bekannt: $s_h = \frac{\left(25{,}7\frac{m}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 70°}{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}$ $s_h = 29{,}7\,m$ f) Die Wurfweite berechnet sich mit $s_w = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$ $s_w = 43{,}3\,m$
Antwort:	a) Die Feder wird mit einer Kraft von 18 N gespannt. b) Die Kugel verlässt mit 25,7 m pro Sekunde das Federschussgerät. c) Die Wand muss 7,8 m vor dem Gerät aufgebaut werden. d) Die Kugel fliegt mit 17,7 m/s durch das Loch und hat dabei eine kinetische Energie von 0,64J. e) Die Kugel erreicht eine maximale Höhe von 29,7 m f) Die Kugel fliegt 43,3 m weit.