Aufgaben zum Energieerhaltungssatz

221. Ein Auto (m=950kg) wird in 4s von v_1 = 50 kmh^{-1} auf v_2 = 90 kmh^{-1} beschleunigt.
a) Welchen Weg legt es dabei zurück.
b) Wie groß ist die Beschleunigungsarbeit?
c) Welche Geschwindigkeit hätte der Wagen mit der gleichen Beschleunigungsarbeit erreicht, wenn er aus dem Stand beschleunigt wäre?

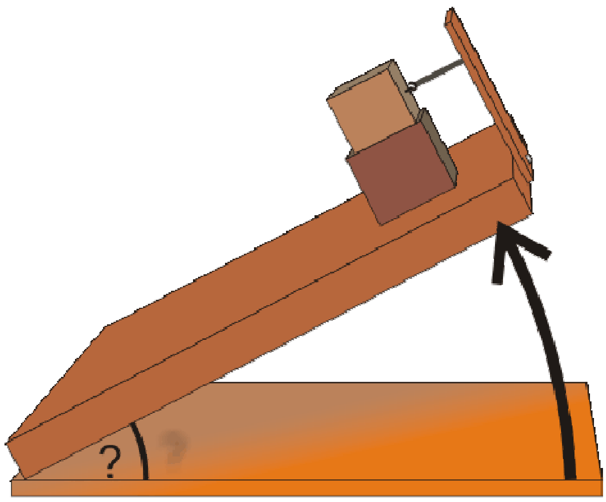
223. Eine an einem Ende fest eingespannte, waagerechte Feder (D = 10 N cm^{-1}) wird durch eine Druckkraft von 50 N vorgespannt. Am Ende dieser Feder liegt ein Holzklotz (m = 5,0 kg) auf waagerechter Unterlage. Die Gleitreibung zwischen Klotz und Unterlage wird durch den Reibungskoeffizienten 0,3 beschrieben. Die Feder wird freigegeben.
a) Welche Energieumwandlungen finden in der Folge statt?
b) Welche Geschwindigkeit hat der Klotz, wenn die Feder wieder entspannt ist? (Nutzen Sie zur Lösung den Teil a)

353. Wie viel Wasser fördert eine Pumpe von 75kW Leistung in 24 Stunden aus einem Schacht von 250m Tiefe?
Wie viel Wasser fördert die Pumpe, wenn sie von einem Elektromotor betrieben wird, der eine Leistung von 120kW aufnimmt und einen Wirkungsgrad von 40% hat?

363. Welcher Wasserstrom in l/min ist erforderlich, wenn bei einem Gefälle von 4,5 m bei einer Wasserturbine eine Leistung von 70 kW abgenommen werden soll? Der Turbinenwirkungsgrad beträgt 80 %.

467. Die Kugel eines Fadenpendels (l=1,2m) wird aus der Gleichgewichtslage um 60 cm ausgelenkt. Welche Geschwindigkeit muss die Kugel zusätzlich erhalten, damit sie nach dem Zurückschwingen eine Kreisbahn beschreibt?

489. Auf einer schiefen Ebene liegen zwei Holzkisten aufeinander (m_o=3 kg, m_u=4kg). Die obere Kiste ist an einem Seil parallel zur Ebene befestigt. Die Haftreibzahl beträgt an allen Grenzflächen μ = 0,3.
Die schiefe Ebene wird langsam noch oben gekippt. Bei welchem Winkel rutscht die untere Kiste los?



Lösungen

221.

geg.:	$m=950\,kg$ $t=4\,s$ $v_1=50\frac{km}{h}=13{,}9\frac{m}{s}$ $v_2=90\frac{km}{h}=25\frac{m}{s}$	ges.:	a) s b) W c) v
Lösung:	a) $s=\frac{a}{2}\cdot t^2+v_0\cdot t \quad \text{mit } a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ $s=78\,m$ b) Die notwendige Beschleunigungsarbeit ist die Differenz der kinetischen Energien nach und vor dem Beschleunigungsvorgang. $W=E_{kin2}-E_{kin1}$ $W=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_2^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_1^2$ $W=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(v_2^2-v_1^2\right)$ $W=205\,kJ$ c) Zur Berechnung der Geschwindigkeit, die mit dieser Energie aus dem Stand erreicht wird, setzt man die kinetische Energie E_{kin1} = 0. $W=E_{kin2}-0$ $W=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_2^2$ $v_2=\sqrt{\frac{2\cdot W}{m}}$ $v_2=20{,}8\frac{m}{s}$ Mit der Beschleunigungsarbeit, die das Auto von 50km/h auf 90 km/h beschleunigt, kann es aus dem Stand eine Geschwindigkeit von 74,8 km/h erreichen. Der Grund dafür ist die quadratische Abhängigkeit der kinetischen Energie von der Geschwindigkeit. Dieser Zusammenhang ist autofahrerunfreundlich!		
Antwort:	Das Auto legt in dieser Zeit einen Weg von 78 m zurück. Es wird eine Beschleunigungsarbeit von 205 kJ verrichtet. Mit dieser Arbeit kommt das Auto aus dem Stand auf eine Geschwindigkeit von 74,8 km/h.		

223.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$D=10\frac{N}{cm}$
$F=50N$
$m=5kg$
$\mu=0,3$</td><td>ges.:</td><td>v</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Lösung:</td><td colspan="3">a) Energieumwandlungen:
Spannenergie = kinetische Energie des Klotzes + Reibungsenergie</td></tr>
<tr><td>b)
$E_{Sp}=E_{kin}+E_R$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{F_e^2}{D}=\frac{m}{2}\cdot v^2+\frac{\mu\cdot G\cdot F}{D}$
$v=\sqrt{\frac{2}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{F_e^2}{D}-\frac{\mu\cdot m}{}\right.}$
$v=0,45\frac{m}{s}$</td><td>$E_{Sp}=\frac{1}{2}F_e\cdot s$
$E_{Sp}=\frac{1}{2}\frac{F_e^2}{D}$</td><td>$E_R=F_R\cdot s$
$E_R=\mu\cdot G\cdot s$
$E_R=\frac{\mu\cdot G\cdot F}{D}$</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">Nachdem die Feder entspannt ist, hat der Klotz eine Geschwindigkeit von 0,45 m/s.</td></tr>
</table>

353. Leistung P = Arbeit W/Zeit t.
Die Arbeit ist die Hubarbeit, die am Wasser verrichtet wird.
also: m*g*h=P*t
nach m umstellen m=2,6*10^6 kg = 2,6*10^6l
Im zweiten Teil wird die Leistung P einfach mit 0,4 multipliziert und noch mal gerechnet.
1,7*10^6l

363.

geg.:	$h=4{,}5\,m$ $P=70\,kW$ $\eta=0{,}8$ $t=60\,s$	ges.:	m
Lösung:	Das Wasser besitzt in 4,5 m Höhe eine bestimmte potentielle Energie, die beim Herabstürzen in kinetische Energie umgewandelt wird. Diese Energie wird in der Wasserturbine in elektrische Energie umgewandelt. Die Leistung des herabstürzenden Wassers muss also so groß sein wie die elektrische Leistung der Turbine (unter Berücksichtigung des Wirkungsgrades!) $P_{el}=P_{mech}\cdot\eta$ $P_{el}=\frac{E_{pot}\cdot\eta}{t}$ $P_{el}=\frac{m\cdot g\cdot h\cdot\eta}{t}$ $m=\frac{P_{el}\cdot t}{g\cdot h\cdot\eta}$ $m=\frac{70\cdot10^3\,W\cdot60\,s}{9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot4{,}5\,m\cdot0{,}8}$ $m=119\cdot10^3\,kg$		
Antwort:	Da ein Kilogramm Wasser einem Volumen von einem Liter entspricht, müssen pro Minute 119 000 Liter herabstürzen.		

467.

geg.:	$\ell = 1{,}2\,\mathrm{m}$ $x = 0{,}6\,\mathrm{m}$	ges.:	v

Lösung:

1. Es wird zuerst die Geschwindigkeit v_1 berechnet, die die Kugel in der Gleichgewichtslage habe muss, um eine Kreisbewegung durchführen zu können.

Die Kugel hat in der Gleichgewichtslage maximale kinetische und keine potentielle Energie. Im oberen Punkt ist die potentielle Energie maximal. Gleichzeitig muss die Kugel aber noch soviel kinetische Energie besitzen, dass die Radialkraft für die Kreisbewegung aufgebracht werden kann.

$$E_{kin1} = E_{kin2} + E_{pot2}$$

Punkt 1 ist unten, Punkt 2 oben.

$$\frac{m}{2} \cdot v_1^2 = \frac{m}{2} \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h$$

Die Höhe zur Berechnung der potentiellen Energie ist die doppelte Fadenlänge.

$$\frac{m}{2} \cdot v_1^2 = \frac{m}{2} \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot 2 \cdot l$$

Wie groß muss die Geschwindigkeit im oberen Punkt sein? Der Radius der Kreisbahn ist die einfache Fadenlänge.

$$F = \frac{m \cdot v_2^2}{\ell}$$

Die Radialkraft muss gerade so groß wie die Gewichtskraft sein:

$$m \cdot g = \frac{m \cdot v_2^2}{\ell}$$

$$v_2^2 = \ell \cdot g$$

Das wird eingesetzt:

$$\frac{m}{2} \cdot v_1^2 = \frac{m}{2} \cdot g \cdot \ell + m \cdot g \cdot 2 \cdot \ell$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} g \cdot \ell + 2 \cdot g \cdot \ell$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_2^2 = 2{,}5 \cdot g \cdot \ell$$

$$v_2 = \sqrt{5 \cdot g \cdot \ell}$$

$$v_2 = \sqrt{5 \cdot 9{,}81 \tfrac{m}{s^2} \cdot 1{,}2\,m}$$

$$v_2 = 7{,}7 \tfrac{m}{s}$$

Im unteren Punkt muss das Pendel also mit 7,7 m/s lang schwingen, um eine Kreisbewegung ausführen zu können.

	Wird die Kugel nun um 0,6 m zur Seite ausgelenkt, hat sie bereits eine Höhe, also eine potentielle Energie. Wird sie jetzt in diesem Punkt abgestoßen, hat sie potentielle und kinetische Energie. Die potentielle Energie wird bis zum Durchfliegen der Gleichgewichtslage in kinetische Energie umgewandelt und die muss dann so groß sein wie im ersten Teil der Aufgabe berechnet.

Der Startpunkt sei Punkt 3.

$$E_{kin1} = E_{pot3} + E_{kin3}$$

$$\frac{m}{2} \cdot v_1^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{m}{2} \cdot v_3^2$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 = g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot v_3^2$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 - g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v_3^2$$

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 - 2 \cdot g \cdot h}$$

In welche Höhe wird die Kugel gehoben, wenn sie 0,6 m zur Seite ausgelenkt wird?

$$h = \ell - x$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\ell}$$

$$x = \cos\alpha \cdot \ell$$

$$\sin\alpha = \frac{0,6}{\ell}$$

$$\alpha = 30°$$

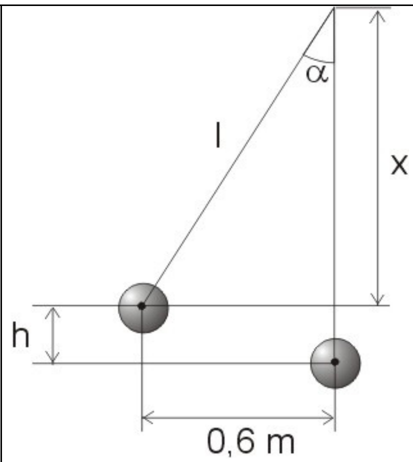
$$x = 1,04\,m$$

Damit ist die Höhe 0,16m und die Geschwindigkeit:

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 - 2 \cdot g \cdot h}$$

$$v_3 = \sqrt{\left(7,7\,\tfrac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 9,81\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 0,16\,m}$$

$$v_3 = 7,5\,\tfrac{m}{s}$$



Antwort:	Die Geschwindigkeit beträgt 7,5 m/s.

489.

geg.:	$m_o = 3\,kg$ $m_u = 4\,kg$ $\mu = 0{,}3$	ges.:	α
Lösung:	Die untere Kiste rutscht dann los, wenn die Hangabtriebskraft etwas größer ist als die Reibungskräfte. Bei Gleichheit der Kräfte bleibt sie gerade noch liegen, eine winzige Vergrößerung des Winkels stört die Ruhe. $F_H = F_R$ Die Hangabtriebskraft ergibt sich aus den Gesetzen zur geneigten Ebene: $F_H = F_G \cdot \sin\alpha$ $F_H = m_u \cdot g \cdot \sin\alpha$ Die Reibungskraft setzt sich aus zwei Kräften zusammen: 1. Die Reibungskraft, die an der Unterseite der unteren Kiste entsteht 2. Die Reibungskraft, die an der Oberseite der unteren Kiste entsteht. zu 1. Da zwei Kisten übereinander liegen, drücken beide auf die Unterseite. Es muss die Summe beider Massen verwendet werden. zu 2. Die Masse der unteren Kiste spielt keine Rolle mehr, es wird nur die Masse der oberen Kiste verwendet. $F_R = F_{R1} + F_{R2}$ $F_R = \mu \cdot F_{N1} + \mu \cdot F_{N2}$ $F_R = \mu \cdot (F_{N1} + F_{N2})$ $F_R = \mu \cdot (F_{G1} \cdot \cos\alpha + F_{G2} \cdot \cos\alpha)$ $F_R = \mu \cdot \cos\alpha \cdot (F_{G1} + F_{G2})$ $F_R = \mu \cdot \cos\alpha \cdot ((m_u + m_o) \cdot g + m_o \cdot g)$ $F_R = \mu \cdot \cos\alpha \cdot g \cdot ((m_u + m_o) + m_o)$ $F_R = \mu \cdot \cos\alpha \cdot g \cdot (m_u + 2 \cdot m_o)$ Und Gleichsetzen: $m_u \cdot g \cdot \sin\alpha = \mu \cdot \cos\alpha \cdot g \cdot (m_u + 2 \cdot m_o)$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\mu \cdot g \cdot (m_u + 2 \cdot m_o)}{m_u \cdot g}$ $\tan\alpha = \mu \frac{m_u + 2 \cdot m_o}{m_u}$ $\tan\alpha = \mu \cdot \left(\frac{m_u}{m_u} + \frac{2 \cdot m_o}{m_u}\right)$ $\tan\alpha = \mu \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot m_o}{m_u}\right)$ $\alpha = 36{,}9°$		
Antwort:	Die untere Kiste rutscht bei einem Winkel von über $36{,}9°$ los.		