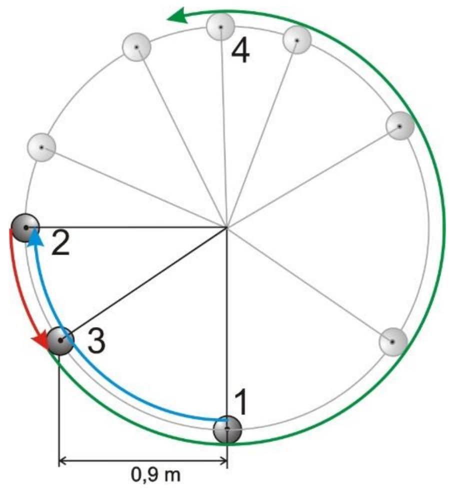
Aufgaben zur Energieumwandlung

526. Laut Auskunft der ÖSAG hat die Phyrnautobahn zwischen Gleinalmtunnel und Mautstelle St. Michael eine Steigung von 1,5%.
Wenn man mit einem Citroen Evasion mit 1800 kg Gesamtgewicht diese Steigung hinunterrollen lässt, erreicht man eine Gleichgeschwindigkeit von 95 km/h.
a) Berechne aus diesen Angaben die Fahrwiderstandskraft bei 95 km/h.
b) Berechne unter Verwendung der berechneten Fahrwiderstandskraft die mechanische Leistung, die zum Antrieb des Fahrzeuges auf ebener Strecke mit 95 km/h erforderlich ist.
c) Berechne aus dieser die mechanische Arbeit, die bei ebener Strecke nötig ist, um dieses Fahrzeug 100 km weit zu bewegen.
d) Berechne daraus und unter der Annahme, dass das gegebene Fahrzeug bei 95 km/h einen Dieselverbrauch von rund 6,8 Liter pro 100 km hat, für diese Bedingungen den Wirkungsgrad.

991. (LK 2018)
Der Übungshang einer Skischule für Kinder hat die Neigung 9,5°. Ein Förderband bringt die Kinder bis zur Bergstation.
a) Ein Kind (Gesamtmasse mit Ausrüstung 35 kg) wird vom Förderband bergauf bewegt, dabei legt es den Weg 30 m zurück.
Berechnen Sie von dem Förderband an dem Kind verrichtete Hubarbeit.

Das Kind steht am oberen Ende des Hanges. Der Skilehrer schiebt das Kind an. Dieses hat dadurch eine Anfangsgeschwindigkeit von 1,0 $m \cdot s^{-1}$ und gleitet gleichmäßig beschleunigt den 30 m langen Hang geradlinig hinab.
Nachdem das Kind das untere Ende des Hanges erreicht hat, gleitet es horizontal weiter.
Die Reibungszahl ist konstant und beträgt 0,10.
b) Weisen Sie nach, dass die maximale Geschwindigkeit des Kindes etwa 6,3 $m \cdot s^{-1}$ beträgt.
c) Eine Skilehrerin (Gesamtmasse mit Ausrüstung 65 kg) steht auf dem horizontalen Auslauf und fängt das ankommende Kind auf. Beide gleiten gemeinsam 1,9 m weit und bleiben dann stehen. Die Reibungszahl ist konstant und beträgt für beide 0,10.
Ermitteln Sie die Länge des horizontalen Gleitweges, den das Kind zurückgelegt hat, bevor es von der Skilehrerin aufgefangen wird.

467. Die Kugel eines Fadenpendels mit 1,2 m Länge wird aus der Gleichgewichtslage nach links bis in die Waagerechte ausgelenkt und zurück beschleunigt. Bei einer Auslenkung von 90 cm wird die Kugel losgelassen.
Welche Geschwindigkeit muss die Kugel mindestens haben, damit sie nach dem Zurückschwingen eine Kreisbahn beschreibt?



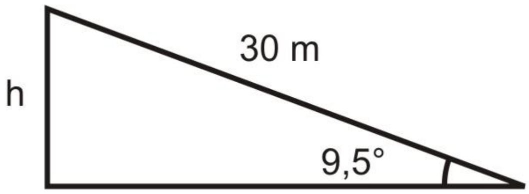
Lösungen
526.

geg.:	$s = 1{,}5\%$ $m = 1800\,kg$ $v = 95\,\frac{km}{h}$ $H = 36\,\frac{MJ}{l}$	ges.:	a)F
Lösung:	a) Eine Steigung von 1,5% bedeutet, dass die Straße auf 100 m um 1,5 m fällt. Damit lässt sich der Winkel berechnen, unter dem die Straße zur Horizontalen geneigt ist. $\sin\alpha = \frac{1{,}5}{100}$ $\alpha = 0{,}86°$ Da das Auto bei 95 km/h seine Endgeschwindigkeit erreicht, gilt für diesen Zustand: die Summe aller wirkenden Kräfte ist Null. Nach dem Newtonschen Grundgesetz ist dann keine Beschleunigung vorhanden und die Geschwindigkeit bleibt gleich. Auf das Auto wirken zwei Kräfte: die Reibungskraft oder Fahrwiderstandskraft F_R und die Hangabtriebskraft F_H als Wirkung der abschüssigen Straße. Beide Kräfte wirken in entgegen gesetzter Richtungen und sind bei konstanter Geschwindigkeit gleich groß. Damit heben sie sich auf. $F_R = F_H$ $F_R = F_G \cdot \sin\alpha$ $F_R = m \cdot g \cdot \sin\alpha$ $F_R = 1800\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \sin 0{,}86°$ $F_R = 264{,}87\,N$ b) Die Leistung berechnet sich über $P = \frac{W}{t}$ Da die Kraft und die Geschwindigkeit konstant sind, kann man auch schreiben: $P = \frac{F \cdot s}{t}$ $P = F \cdot v$ $P = 264{,}87\,N \cdot 26{,}39\,\frac{m}{s}$ $P = 6990\,W$ $P = 6{,}99\,kW$		

	c) Die Arbeit ist $W = P \cdot t$ Die Zeit ist die Zeit, die das Auto mit dieser Geschwindigkeit für die 100 km benötigt: $v = \frac{s}{t}$ $t = \frac{s}{v}$ Damit wird dann: $W = \frac{P \cdot s}{v}$ $W = \frac{6990\,W \cdot 100 \cdot 10^3\,m}{26{,}39\,\frac{m}{s}}$ $W = 26{,}49 \cdot 10^6\,J$ $W = 26{,}49\,MJ$ d) In den 6,8 l Diesel stecken $E = H \cdot V$ $E = 36\,\frac{MJ}{l} \cdot 6{,}8\,l$ $E = 244{,}8\,MJ$ Damit ergibt sich ein Wirkungsgrad von $\eta = \frac{W}{E}$ $\eta = 0{,}11$ $\eta = 11\%$ e)
Antwort:	Die Fahrwiderstandskraft ist 265 N groß. Damit diese Geschwindigkeit gehalten werden kann, muss der Motor eine Leistung von 6,99 kW aufbringen. Für die 100 km Fahrstrecke sind 26,5 MJ Energie notwendig. Der Wirkungsgrad beträgt 11 %.

991.

991.
a) Die Hubarbeit ergibt sich aus der Kraft, mit der das Kind nach oben bewegt wird und der Höhe, die dabei überwunden wird.
Die Höhe ist nicht der zurückgelegt Weg, sondern die direkte Höhe des oberen Punktes über dem unteren Punkt.



$$\sin 9{,}5° = \frac{h}{30\,m}$$

$$h = \sin 9{,}5° \cdot 30\,m$$

$$h = 4{,}9\,m$$

Die gesuchte Hubarbeit ist dann

$$W_H = F_G \cdot h$$

$$W_H = m \cdot g \cdot h$$

$$W_H = 35\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 4{,}9\,m$$

$$W_H = 1{,}7\,kJ$$

b) 1. Lösungsweg: Die Geschwindigkeit kann über einen Energieansatz berechnet werden.
Am oberen Ende nach dem Anstoßen besitzt das Kind sowohl potenzielle als auch kinetische Energie. Beim Herabgleiten wird diese Energie in kinetische Energie und Wärmeenergie durch die Reibungsarbeit umgewandelt.
Die gesuchte Geschwindigkeit steckt in der kinetischen Energie, die das Kind am Ende des Hanges hat.

$$E_{kin,o} + E_{pot,o} = E_{kin,u} + W_R$$

$$\frac{35\,kg}{2} \cdot \left(1\frac{m}{s}\right)^2 + 1{,}7 \cdot 10^3\ J = \frac{35\,kg}{2} \cdot v + F_N \cdot s \cdot \mu$$

F_N ist die Normalkraft, also die Kraft, mit der das Kind auf die Unterlage drückt. Sie ist die Gewichtskraft mal dem Kosinus des Winkels, also hier 9,5°.

$$\frac{35\,kg}{2} \cdot \left(1\frac{m}{s}\right)^2 + 1{,}7 \cdot 10^3\ J - 35\,kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot \cos 9{,}5° \cdot 30m \cdot 0{,}1 = \frac{35\,kg}{2} \cdot v^2$$

$$17{,}5\,J + 1{,}7 \cdot 10^3\ J - 1{,}02 \cdot 10^3\ J = \frac{35\,kg}{2} \cdot v^2$$

$$6{,}3\frac{m}{s} = v$$

2. Lösungsweg: Wie aus der Aufgabenstellung zu entnehmen, ist die Bewegung des Kindes gleichmäßig beschleunigt. Damit ist die Endgeschwindigkeit

$$v = a \cdot t + v_0$$

Die Beschleunigung kann über die Kraft berechnet werden:

$$a = \frac{F}{m}$$

Die Kraft ergibt sich aus der Hangabtriebskraft, von der die Reibungskraft abgezogen wird. Die Hangabtriebskraft ist

$$F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

und die Reibungskraft

$$F_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

Damit ist die Beschleunigung

$$a = 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot (\sin(9{,}5°) - 0{,}1 \cdot \cos(9{,}5°))$$

$$a = 0{,}65\frac{m}{s^2}$$

In der ersten Gleichung sind jetzt die Beschleunigung und die Anfangsgeschwindigkeit bekannt. Es fehlt noch die Zeit, die das Kind braucht, um den Hang herunter zu gleiten.
Es gilt:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

In dieser Gleichung ist nur die Zeit unbekannt und kann demnach berechnet werden.

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

$$0 = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t - s$$

Löst man diese quadratische Gleichung auf, erhält man als Gleitzeit 8,2 s.
Damit kann nun die Geschwindigkeit berechnet werden:

$$v = 0,65\frac{m}{s^2} \cdot 8,2\,s + 1\frac{m}{s}$$

$$v = 6,33\frac{m}{s}$$

c) Das Kind hat zu Beginn des horizontalen Auslaufes die Geschwindigkeit von 6,3 $m \cdot s^{-1}$. Bis zum Auftreffen auf die Skilehrerin wird von der kinetischen Energie des Kindes durch Reibung ein Teil in Wärme umgewandelt.
Der Aufprall ist ein unelastischer Stoß. Danach heben die beiden eine bestimmte Geschwindigkeit und demnach ein bestimmte kinetische Energie. Die wird bis zum Stillstand komplett in Wärme durch Reibung umgewandelt.

Aus dem letzten Weg kann die Geschwindigkeit berechnet werden, die die beiden sofort nach dem unelastischen Stoß haben.

$$E_{kin} = W_R$$

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

Umgestellt ergibt das

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \mu \cdot g \cdot s}$$

Wie zu sehen ist, kürzt sich die Masse raus.

$$v = \sqrt{2 \cdot 0,1 \cdot 9,81\frac{m}{s^2} \cdot 1,9\,m}$$

$$v = 1,93\frac{m}{s}$$

Daraus lässt sich nun die Geschwindigkeit des Kindes beim Aufprall berechnen. Für einen unelastischen Stoß gilt:

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

u ist die Geschwindigkeit nach dem Stoß, mit 1 wird das Kind und mit 2 die Skilehrerin bezeichnet. Da die Skilehrerin steht, ist ihre Geschwindigkeit 0. Damit erhält man die Geschwindigkeit des Kindes.

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + 0}{m_1 + m_2}$$

$$m_1 \cdot v_1 = u \cdot (m_1 + m_2)$$

$$v_1 = \frac{u \cdot (m_1 + m_2)}{m_1}$$

$$v_1 = \frac{1,93\frac{m}{s} \cdot 100\,kg}{35\,kg}$$

$$v_1 = 5,52\frac{m}{s}$$

Die kinetische Energie des Kindes zum Beginn des horizontalen Weges hat sich zum Teil in Wärmeenergie durch Reibungsarbeit umgewandelt. 1 ist der Beginn des Gleitens, 2 die Stelle des Stoßes:

$$E_{kin,1} = W_R + E_{kin,2}$$

$$\frac{m}{2} \cdot v_1^2 = \mu \cdot m \cdot g \cdot s + \frac{m}{2} \cdot v_2^2$$

s ist der gesuchte Weg.
Die Masse kürzt sich raus.

$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 = \mu \cdot g \cdot s + \frac{1}{2} \cdot v_2^2$$

$$\mu \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot v_2^2$$

$$\mu \cdot g \cdot s = \frac{1}{2} \cdot \left(v_1^2 - v_2^2 \right)$$

$$s = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

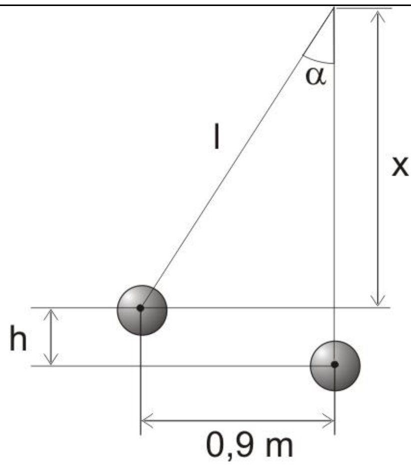
$$s = \frac{\left(6{,}3 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(5{,}5 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}}$$

$$s = 4{,}8\,m$$

467.

geg.:	$\ell = 1{,}2\,m$ $a = 0{,}9\,m$	ges.:	v

Lösung:	Es wird zuerst die Geschwindigkeit v_1 berechnet, die die Kugel in der Gleichgewichtslage habe muss, um eine Kreisbewegung durchführen zu können. Die Kugel hat in der Gleichgewichtslage maximale kinetische und keine potentielle Energie. Im oberen Punkt ist die potentielle Energie maximal. Gleichzeitig muss die Kugel aber noch soviel kinetische Energie besitzen, dass die Radialkraft für die Kreisbewegung aufgebracht werden kann. $E_{kin1} = E_{kin4} + E_{pot4}$ Punkt 1 ist unten, Punkt 4 oben. $\frac{m}{2} \cdot v_1^2 = \frac{m}{2} \cdot v_4^2 + m \cdot g \cdot h$ Die Höhe zur Berechnung der potentiellen Energie ist die doppelte Fadenlänge. $\frac{m}{2} \cdot v_1^2 = \frac{m}{2} \cdot v_4^2 + m \cdot g \cdot 2 \cdot \ell$ Wie groß muss die Geschwindigkeit im oberen Punkt sein? Der Radius der Kreisbahn ist die einfache Fadenlänge. $F_r = \frac{m \cdot v_4^2}{\ell}$ Die Radialkraft muss gerade so groß wie die Gewichtskraft sein: $m \cdot g = \frac{m \cdot v_4^2}{\ell}$ $v_4^2 = \ell \cdot g$ Das wird eingesetzt: $\frac{m}{2} \cdot v_1^2 = \frac{m}{2} \cdot g \cdot \ell + m \cdot g \cdot 2 \cdot \ell$ $\frac{1}{2} \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} g \cdot \ell + 2 \cdot g \cdot \ell$ $\frac{1}{2} \cdot v_1^2 = 2{,}5 \cdot g \cdot \ell$ $v_1 = \sqrt{5 \cdot g \cdot \ell}$ $v_1 = \sqrt{5 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 1{,}2\,m}$ $v_1 = 7{,}67 \frac{m}{s}$ Im unteren Punkt muss das Pendel also mit 7,7 m/s lang schwingen, um eine Kreisbewegung ausführen zu können.
	Wird die Kugel nun um 0,9 m zur Seite ausgelenkt, hat sie bereits eine Höhe, also eine potentielle Energie. Wird sie jetzt in diesem Punkt abgestoßen, hat sie potentielle und kinetische Energie. Die potentielle Energie wird bis zum Durchfliegen der Gleichgewichtslage in kinetische Energie umgewandelt und die muss dann so groß sein wie im ersten Teil der Aufgabe berechnet. Der Startpunkt sei Punkt 3. $E_{kin1} = E_{pot3} + E_{kin3}$ $\frac{m}{2} \cdot v_1^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{m}{2} \cdot v_3^2$ $\frac{1}{2} v_1^2 = g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot v_3^2$ $\frac{1}{2} v_1^2 - g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v_3^2$ $v_3 = \sqrt{v_1^2 - 2 \cdot g \cdot h}$ In welche Höhe wird die Kugel gehoben, wenn sie 0,9 m zur Seite ausgelenkt wird?

	$h = \ell - x$ $\cos\alpha = \frac{x}{\ell}$ $x = \cos\alpha \cdot \ell$ $\sin\alpha = \frac{a}{\ell}$ $\alpha = 48{,}59°$ $x = 0{,}794\,m$ Damit ist die Höhe 0,406m und die Geschwindigkeit: $v_3 = \sqrt{v_1^2 - 2 \cdot g \cdot h}$ $v_3 = \sqrt{\left(7{,}7\,\frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}406\,m}$ $v_3 = 7{,}13\,\frac{m}{s}$	
Antwort:	Die Geschwindigkeit beträgt 7,2 m/s.	