Aufgaben zum Impulserhaltungssatz

95. Ein Güterwaggon der Masse m = 25 t rollt ein 50 m langes, unter 2° gegen die Horizontale geneigtes Gleis hinab und stößt dann auf einen dort abgestellten, ruhenden Güterwaggon der Masse M = 18 t. Beim Anstoßen kuppeln beide Wagen zusammen und bilden eine Einheit.
a) Mit welcher Geschwindigkeit stößt der erste Waggon an den zweiten?
b) Mit welcher Geschwindigkeit rollen beide Waggons weiter?

120. Ein Körper der Masse m = 2 kg und der Geschwindigkeit v_1 = 24 km/h trifft elastisch auf einen zweiten, ruhenden Körper der Masse M. Nach dem Stoß bewegen sich beide Körper mit gleich großer, aber entgegengesetzt gerichteter Geschwindigkeit voneinander weg. Wie groß ist die Masse M des zweiten Körpers und wie groß der Geschwindigkeitsbetrag nach dem Stoß?

228. In eine Lore von 800 kg Masse, die mit einer Geschwindigkeit 1,5 ms^{-1} fährt, fallen von oben 600 kg Schotter. Auf welchen Betrag sinkt dadurch die Geschwindigkeit der Lore?

231. Ein Körper mit der Masse m_1 stößt mit der Geschwindigkeit v_1 gegen einen ruhenden Körper mit der Masse m_2. Der Stoß wird als elastisch, gerade und zentral angegeben. In diesem Fall berechnet man die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stoß mit den Gleichungen

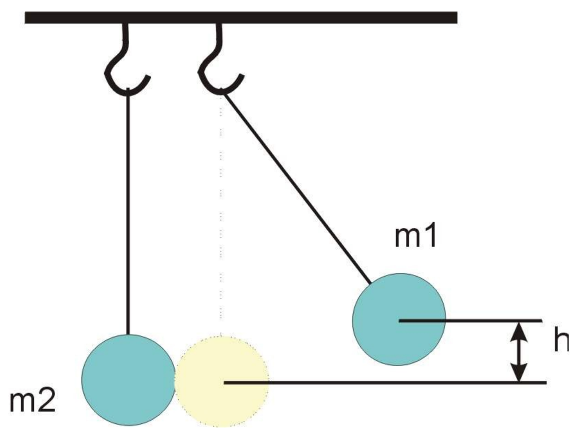
$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2\cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)\cdot v_2 + 2\cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$$

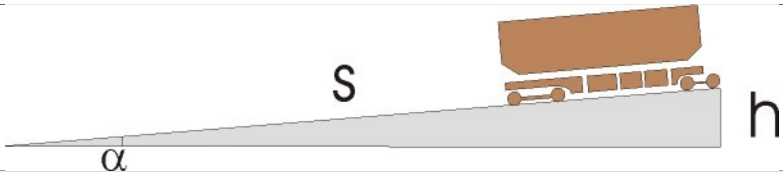
Leiten Sie aus diesen allgemeinen Gleichungen spezielle Gleichungen für folgende Fälle her:
* Die Massen der stoßenden Körper sind gleich.
* Die Masse des Körpers 2 ist sehr klein im Vergleich zur Masse des Körpers 1.

593. Ein Wagen (Masse m_1 = 4kg) prallt mit einer Geschwindigkeit v_1 = 1,2 m/s auf einen zweiten (m_2 = 5 kg), der sich in gleicher Richtung mit der Geschwindigkeit v_2 = 0,6 m/s bewegt.
a) Wie groß sind die Geschwindigkeiten der beiden Wagen, wenn der Stoß elastisch ist?
b) Wie ändern sich die kinetischen Energien beim zentralen elastischen Stoß?
c) Wie lauten die Lösungen, wenn die Wagen aufeinander zulaufen?

237. Von zwei in gleicher Höhe pendelnd aufgehängten elastischen Kugeln ist die eine (m_1) doppelt so schwer wie die andere (m_2). Die schwerere Kugel wird um die Höhe h angehoben und losgelassen. Welche Höhe h_1 und h_2 erreichen die Kugeln nach dem Zusammenprall? (siehe Abbildung)



Lösungen:
95.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$m_1 = 25 \cdot 10^3\,kg$
$m_2 = 18 \cdot 10^3\,kg$
$s = 50\,m$
$\alpha = 2^\circ$</td><td>ges.:</td><td>v_1
v'</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="3">Zur Bestimmung der Geschwindigkeit, mit der der Waggon unten ankommt, muss die Höhe der geneigten Eben bestimmt werden. Die Geschwindigkeit kann dann über den Energieerhaltungssatz oder über den freien Fall berechnet werden. Wenn die Reibung vernachlässigt wird, ist die Endgeschwindigkeit nämlich genau so groß, als wenn der Körper diese Höhe im freien Fall zurückgelegt hätte.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">$\sin\alpha = \frac{h}{s}$
$h = \sin\alpha \cdot s$
$h = 1{,}75\,m$
Damit kann die Geschwindigkeit berechnet werden:</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$v = a \cdot t$
$v = a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$
$v^2 = a^2 \cdot \frac{2 \cdot s}{a}$
$v = \sqrt{2 \cdot h \cdot g}$
$v = 5{,}86\,\frac{m}{s}$</td><td>$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$
$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Wenn nach dem Stoß beide Waggons miteinander verbunden sind, ist es ein unelastischer Stoß:
$v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$
$v' = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$
$v' = 3{,}5\,\frac{m}{s}$
$v' = 12{,}6\,\frac{km}{h}$</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">Der erste Waggon stößt mit 5,9 m/s auf den zweiten. Nach dem Koppeln bewegen sich beide mit 3,5 m/s weiter.</td></tr>
</table>

120.

geg.:	$m_1 = 2\,kg$ $v_1 = 24\,\frac{km}{h} = 6{,}7\,\frac{m}{s}$ $v_2 = 0\,\frac{m}{s}$	ges.:	m_2
Lösung:	a) Es gelten die Gesetzte des elastischen Stoßes und es gilt: $v_1' = -v_2'$ Das negative Vorzeichen zeigt an, dass sich die beiden Körper in unterschiedliche Richtung wegbewegen. Damit wird: $\frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = -\frac{(m_2 - m_1)\cdot v_2 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$ $\frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 0}{m_1 + m_2} = -\frac{0 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$ $\frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1}{m_1 + m_2} = -\frac{2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$ $(m_1 - m_2)\cdot v_1 = -2m_1 \cdot v_1$ $m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1 = -2m_1 \cdot v_1$ $-m_2 \cdot v_1 = -3m_1 \cdot v_1$ $m_2 = 3m_1$ $m_2 = 6\,kg$ b) $v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ $v_1' = \frac{-4\,kg \cdot 6{,}7\,\frac{m}{s}}{8\,kg}$ $v_1' = -3{,}35\,\frac{m}{s}$ $v_2' = \frac{(m_2 - m_1)\cdot v_2 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$ $v_2' = \frac{2 \cdot 2\,kg \cdot 6{,}7\,\frac{m}{s}}{8\,kg}$ $v_2' =$ ´$3{,}35\,\frac{m}{s}$		
Antwort:	Der zweite Körper ist 3 mal so schwer wie der erste, also 6 kg. Beide Körper haben nach dem Stoß eine Geschwindigkeit von 3,35 m/s.		

228.

geg.:	$m_L = 800\,kg$ $v_{L1} = 1{,}5\,\frac{m}{s}$ $m_S = 600\,kg$	ges.:	v_{L2}
Lösung:	Da der Schotter von oben in die Lore fällt, steht die Kraft des abgebremsten Schotters senkrecht auf der Bewegung der Lore und wirkt auf diese Weise nicht zur Beschleunigung bei. Die Lore wird als ein System betrachtet, deren Impuls konstant bleibt. Da die Masse größer wird, muss die Geschwindigkeit kleiner werden. $m_L \cdot v_{L1} = (m_L + m_S) \cdot v_{L2}$ $v_{L2} = \frac{m_L \cdot v_{L1}}{(m_L + m_S)}$ $v_{L2} = \frac{800\,kg \cdot 1{,}5\,\frac{m}{s}}{800\,kg + 600\,kg}$ $v_{L2} = 0{,}86\,\frac{m}{s}$		
Antwort:	Die Geschwindigkeit sinkt auf 0,86 m/s.		

231.

Der zweite Körper ruht, also kann v_2 immer gleich 0 gesetzt werden.

* Die Massen sind gleich groß,

$m_1 = m_2 = m$

Damit wird aus der allgemeinen Gleichung:

$u_1 = \frac{(m - m) \cdot v_1 + 2 \cdot m \cdot v_2}{m + m}$ $u_1 = \frac{0 + 2 \cdot m \cdot 0}{2 \cdot m}$ $u_1 = 0$	$u_2 = \frac{(m - m) \cdot v_2 + 2 \cdot m \cdot v_1}{m + m}$ $u_2 = \frac{0 + 2 \cdot m \cdot v_1}{2 \cdot m}$ $u_2 = v_1$

Der ankommende Körper 1 wird bis zum Stillstand abgebremst, der andere, vorher ruhende Körper, bewegt sich mit der Geschwindigkeit des ersten Körpers weiter.

* Die Masse des Körpers 2 ist sehr klein im Vergleich zur Masse des Körpers 1. Damit kann man die Masse des 2. Körpers einfach weglassen oder 0 setzen.

$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ $u_1 = \frac{(m_1) \cdot v_1 + 2 \cdot 0 \cdot v_2}{m_1}$ $u_1 = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1}$ $u_1 = v_1$	$u_2 = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$ $u_2 = \frac{(-m_1) \cdot 0 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1}$ $u_2 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1}$ $u_2 = 2\,v_1$

Der ankommende Körper bewegt sich einfach weiter. Der ruhende Körper fliegt mit der doppelten Geschwindigkeit des ankommenden Körpers in dessen Richtung fort.

593.

geg.:	$m_1 = 4\,kg$ $v_1 = 1{,}2\,\frac{m}{s}$ $m_2 = 5\,kg$ $v_2 = 0{,}6\,\frac{m}{s}$	ges.:	v_1', v_2' E_{kin}
Lösung:	Die Geschwindigkeiten der beiden Wagen nach dem Stoß berechnen sich nach den Gesetzten für den elastischen Stoß: $v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ $v_1' = \frac{(4\,kg - 5\,kg)\cdot 1{,}2\,\frac{m}{s} + 2 \cdot 5\,kg \cdot 0{,}6\,\frac{m}{s}}{4\,kg + 5\,kg}$ $v_1' = 0{,}53\,\frac{m}{s}$ $v_2' = \frac{(m_2 - m_1)\cdot v_2 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$ $v_2' = \frac{(5\,kg - 4\,kg)\cdot 0{,}6\,\frac{m}{s} + 2 \cdot 4\,kg \cdot 1{,}2\,\frac{m}{s}}{4\,kg + 5\,kg}$ $v_2' = 1{,}13\,\frac{m}{s}$ b) Die kinetischen Energien müssen für beide Wagen vor und nach dem Stoß berechnet werden: $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$ $E_{kin1} = \frac{4\,kg}{2} \cdot \left(1{,}2\,\frac{m}{s}\right)^2$ $E_{kin1} = 2{,}88\,J$ $E_{kin1}' = 0{,}562\,J$ $E_{kin2} = 0{,}9\,J$ $E_{kin2}' = 3{,}192\,J$ Berechnet man die Summe der Energien vor dem Stoß und nach dem Stoß, stellt man fest, dass beide gleich sind: $E_{kin} = E_{kin1} + E_{kin2}$ $E_{kin} = 3{,}8\,J$ $E_{kin}' = E_{kin1}' + E_{kin2}'$ $E_{kin}' = 3{,}8\,J$		

	c) Wenn die Wagen aufeinander zulaufen, muss eine Geschwindigkeit negativ werden. Die Richtung des Wagen 1 soll positiv sein: $v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ $v_1' = \frac{(4kg - 5kg) \cdot 1{,}2\frac{m}{s} - 2 \cdot 5kg \cdot 0{,}6\frac{m}{s}}{4kg + 5kg}$ $v_1' = -0{,}8\frac{m}{s}$ $v_2' = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$ $v_2' = \frac{(5kg - 4kg) \cdot \left(-0{,}6\frac{m}{s}\right) + 2 \cdot 4kg \cdot 1{,}2\frac{m}{s}}{4kg + 5kg}$ $v_2' = 1\frac{m}{s}$
Antwort:	a) Wagen 1 bewegt sich nach dem Stoß mit der kleineren Geschwindigkeit 0,5e m/s weiter. Der Wagen 2 ist auf 1,13 m/s schneller geworden. b) Die Summe der kinetischen Energien vor dem Stoß ist so groß wie die Summe der kinetischen Energie nach dem Stoß. c) Wenn die Wagen aufeinander zulaufen, fahren nach dem Stoß beide Wagen in die entgegen gesetzte Richtung zurück, Wagen 1 mit 0,8 m/s und Wagen 2 mit 1 m/s.

237.

geg.:	$m_1 = 2 \cdot m_2$ h g	ges.:	h'_1 h'_2

Lösung:

1. Mit welcher Geschwindigkeit trifft m_1 auf m_2?

Die Kugel besitzt vor dem Loslassen potenzielle Energie, die vollständig in kinetische Energie umgewandelt wird.

$$E_{pot} = E_{kin}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

2. Zwischen den Kugeln findet ein elastischer Stoß statt. Welche Geschwindigkeiten haben die Kugeln nach dem Stoß?

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{3 \cdot m_2}$$

$$v'_1 = \frac{m_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{3 \cdot m_2}$$

$$v'_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{3}$$

$$v'_2 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{3 \cdot m_2}$$

$$v'_2 = \frac{4 \cdot m_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{3 \cdot m_2}$$

$$v'_2 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

3. Beide Kugeln besitzen nach dem Stoß kinetische Energie, die wieder in potenzielle Energie umgewandelt wird. mit diesem Ansatz kann man die gesuchten Höhen berechnen.

$$E_{kin} = E_{pot}$$

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$$

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Das ist die allgemeine Gleichung für die gesuchte Höhe. Jetzt werden die bei 2. berechneten Geschwindigkeiten eingegeben.

$h_1 = \frac{2 \cdot g \cdot h}{9 \cdot 2 \cdot g}$	$h_2 = \frac{16}{9} \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{2 \cdot g}$
$h_1 = \frac{1}{9} \cdot h$	$h_2 = \frac{16}{9} \cdot h$

Antwort: Kugel 1 erreicht eine Höhe von 1/9 und Kugel 2 von 16/9 der Höhe, um die die schwere Kugel angehoben wurde.