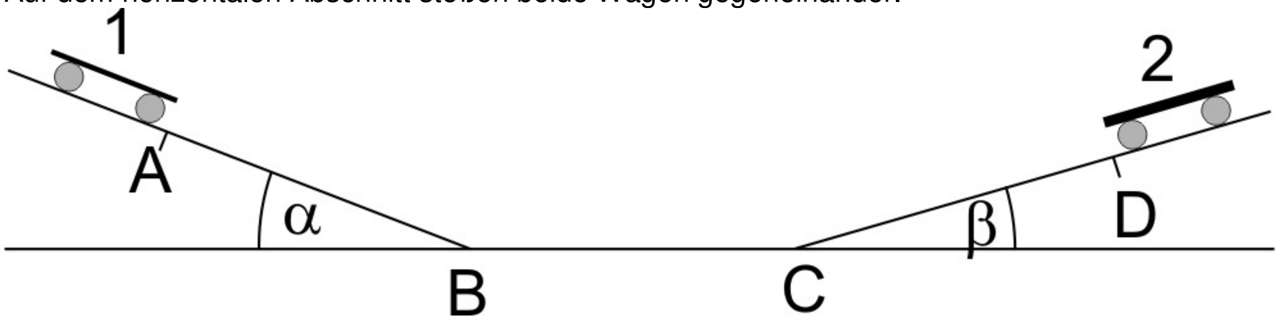
Aufgaben zum Impuls

593. Ein Wagen (Masse m_1 = 4kg) prallt mit einer Geschwindigkeit v_1 = 1,2 m/s auf einen zweiten (m_2 = 5 kg), der sich in gleicher Richtung mit der Geschwindigkeit v_2 = 0,6 m/s bewegt.
a) Wie groß sind die Geschwindigkeiten der beiden Wagen, wenn der Stoß elastisch ist?
b) Wie ändern sich die kinetischen Energien beim zentralen elastischen Stoß?
c) Wie lauten die Lösungen, wenn die Wagen aufeinander zulaufen?

742. Die Experimentierwagen 1 und 2 befinden sich auf einer Bahn, die aus zwei geneigten Ebenen und einem horizontalen Abschnitt besteht. (Abbildung nicht maßstäblich). Es gilt:
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1{,}2\,m; \alpha = 15°; \beta = 10°$
Die Masse des Wagens 2 ist doppelt so groß wie die des Wagens 1.
Sie starten zu verschiedenen Zeitenpunkten vom Punkt a bzw. D aus der Ruhe heraus, so dass Wagen 1 den Punkt B zum gleichen Zeitpunkt passiert wie Wagen 2 den Punkt C.
Auf dem horizontalen Abschnitt stoßen beide Wagen gegeneinander.



a) Berechnen Sie die Differenz der Startzeiten der zwei Wagen.
b) Ermitteln Sie den Ort, an dem die beiden Wagen gegeneinander stoßen.
c) Der Stoß erfolgt unelastisch. Geben Sie den Richtungssinn für die Bewegung nach dem Stoß an. Begründen Sie.
d) Es soll entweder der Winkel Alpha oder der Winkel Beta so verändert werden, dass die gesamte kinetische Energie beim Zusammenstoß vollständig in thermische Energie umgewandelt wird. Alle anderen oben genannten Ausgangsbedingungen bleiben unverändert.
Wählen Sie eine Möglichkeit und berechnen sie den zugehörigen Winkel.

Lösungen
593.

geg.:	$m_1 = 4\,kg$ $v_1 = 1{,}2\,\frac{m}{s}$ $m_2 = 5\,kg$ $v_2 = 0{,}6\,\frac{m}{s}$	ges.:	$v_1^{'}, v_2^{'}$ E_{kin}
Lösung:	Die Geschwindigkeiten der beiden Wagen nach dem Stoß berechnen sich nach den Gesetzten für den elastischen Stoß: $v_1^{'} = \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ $v_1^{'} = \frac{(4\,kg - 5\,kg)\cdot 1{,}2\,\frac{m}{s} + 2\cdot 5\,kg \cdot 0{,}6\,\frac{m}{s}}{4\,kg + 5\,kg}$ $v_1^{'} = 0{,}53\,\frac{m}{s}$ $v_2^{'} = \frac{(m_2 - m_1)\cdot v_2 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$ $v_2^{'} = \frac{(5\,kg - 4\,kg)\cdot 0{,}6\,\frac{m}{s} + 2\cdot 4\,kg \cdot 1{,}2\,\frac{m}{s}}{4\,kg + 5\,kg}$ $v_2^{'} = 1{,}13\,\frac{m}{s}$ b) Die kinetischen Energien müssen für beide Wagen vor und nach dem Stoß berechnet werden: $E_{kin} = \frac{m}{2}\cdot v^2$ $E_{kin1} = \frac{4\,kg}{2}\cdot \left(1{,}2\,\frac{m}{s}\right)^2$ $E_{kin1} = 2{,}88\,J$ $E_{kin1}^{'} = 0{,}562\,J$ $E_{kin2} = 0{,}9\,J$ $E_{kin2}^{'} = 3{,}192\,J$ Berechnet man die Summe der Energien vor dem Stoß und nach dem Stoß, stellt man fest, dass beide gleich sind: $E_{kin} = E_{kin1} + E_{kin2}$ $E_{kin} = 3{,}8\,J$ $E_{kin}^{'} = E_{kin1}^{'} + E_{kin2}^{'}$ $E_{kin}^{'} = 3{,}8\,J$		

	c) Wenn die Wagen aufeinander zulaufen, muss eine Geschwindigkeit negativ werden. Die Richtung des Wagen 1 soll positiv sein: $v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ $v_1' = \frac{(4\,kg - 5\,kg) \cdot 1{,}2\,\frac{m}{s} - 2 \cdot 5\,kg \cdot 0{,}6\,\frac{m}{s}}{4\,kg + 5\,kg}$ $v_1' = -0{,}8\,\frac{m}{s}$ $v_2' = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$ $v_2' = \frac{(5\,kg - 4\,kg) \cdot \left(-0{,}6\,\frac{m}{s}\right) + 2 \cdot 4\,kg \cdot 1{,}2\,\frac{m}{s}}{4\,kg + 5\,kg}$ $v_2' = 1\,\frac{m}{s}$
Antwort:	a) Wagen 1 bewegt sich nach dem Stoß mit der kleineren Geschwindigkeit 0,5e m/s weiter. Der Wagen 2 ist auf 1,13 m/s schneller geworden. b) Die Summe der kinetischen Energien vor dem Stoß ist so groß wie die Summe der kinetischen Energie nach dem Stoß. c) Wenn die Wagen aufeinander zulaufen, fahren nach dem Stoß beide Wagen in die entgegen gesetzte Richtung zurück, Wagen 1 mit 0,8 m/s und Wagen 2 mit 1 m/s.

742.a)

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$AB = 1{,}2\,m$
$BC = 1{,}2\,m$
$CD = 1{,}2\,m$
$\alpha = 15°$
$\beta = 10°$</td><td>ges.:</td><td>Δt</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="3">Werden die beiden Wagen gleichzeitig gestartet, kommen sie zu unterschiedlichen Zeiten unten an. Damit sie gleichzeitig ankommen, müssen sie um diese Zeitspanne versetzt gestartet werden.
Es findet eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung statt, da die beschleunigende Kraft die Hangabtriebskraft ist bei der geneigten Ebene konstant bleibt.
Es gelten die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung:
$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$
$v = a \cdot t$
Durch Einsetzen der beiden Gleichungen ineinander erhält man
$t = \frac{2 \cdot s}{v}$
v ist die Endgeschwindigkeit in den Punkten B und C.
Die Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz. Im Startpunkt besitzt der Wagen potenzielle Energie, die vollständig in kinetische Energie umgewandelt wird.
$E_{pot} = E_{kin}$
$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2$
$g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v^2$
$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$
Die Höhe lässt sich aus dem Winkel und der Länge der geneigten Ebene berechnen:
$h = \sin\alpha \cdot s$
Setzt man das alles ein, erhält man
$t = \frac{2 \cdot s}{\sqrt{2 \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot s}}$
$t^2 = \frac{4 \cdot s^2}{2 \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot s}$
$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g \cdot \sin\alpha}}$
Für die beiden Wagen errechnet man dann Fahrtzeiten von 0,97 s und 1,19 s. Damit beide unten gleichzeitig ankommen, muss der Wagen 2 um 0,22 s eher gestartet werden.</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">Wagen 2 muss 0,22 s eher gestartet werden, damit beide gleichzeitig unten ankommen.</td></tr>
</table>

b) Beide Wagen kommen zwar gleichzeitig, aber mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten auf der Horizontalen an. Damit wird der Stoßpunkt mehr in Richtung Wagen 2 liegen, da er ja langsamer ist.
Für den gesuchten Punkt gilt. Beide fahren die gleiche Zeit und die Summe beider gefahrener Wege ist 1,2 m lang (s).

$$t_1 = t_2$$

$$s_1 + s_2 = s$$

Die Bewegung erfolgt gleichförmig, es gilt also weiterhin:

$$v = \frac{s}{t}$$

oder nach der Zeit umgestellt:

$$t = \frac{s}{v}$$

Da die Zeiten für beide Bewegungen gleich sind, kann man schreiben:

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}$$

und nach einer gesuchten strecke umgestellt:

$$s_2 = s_1 \frac{v_2}{v_1}$$

Für s_1 kann man schreiben:

$$s_1 = s - s_2$$

und erhält:

$$s_2 = (s - s_2) \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

Das stellt man so um, dass die gesuchte Größe s_2 allein auf einer Seite steht:

$$s_2 = s \cdot \frac{v_2}{v_1} - s_2 \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

$$s_2 + s_2 \cdot \frac{v_2}{v_1} = s \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

$$s_2 \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right) = s \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

$$s_2 = s \cdot \frac{v_2}{v_1 \cdot \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right)}$$

$$s_2 = s \cdot \frac{v_2}{v_1 + v_2}$$

Setzt man die bekannten Größen ein, erhält man einen Weg von 0,54 m. Das ist die Strecke, die der Wagen 2 auf der Horizontalen bis zur Kollision fährt. Der Wagen 1 fährt dann 0,66 m. Beide Wagen benötigen bis zum Zusammenstoß 0,267 s.

c) Die beiden Wagen kommen aus entgegen gesetzten Richtungen mit einer bestimmten Masse und Geschwindigkeit. Sie besitzen jeder einen Impuls.
Der Impuls ist

$$p = m \cdot v$$

Nach dem Impulserhaltungssatz ist die Summe der Impulse vor dem Stoß so groß wie der Impuls der beiden verbundenen Wagen nach dem Stoß. Da die beiden Wagen aus verschiedenen Richtungen kommen, unterscheiden sie sich im Vorzeichen.

Wären beide Impulse vom Betrag her gleich groß, ist die Summe nach dem Stoß Null, Der Wagen würde stehenbleiben. Bei unterschiedlichen Beträgen hat der gekoppelte Wagen nach dem Stoß die Richtung des Wagens mit dem größeren Impulsbetrages.
Wagen 1 hat eine größere Geschwindigkeit als Wagen 2, da er von einer steileren Ebene kommt. Die Geschwindigkeiten verhalten sich wie

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{2\cdot g\cdot \sin\alpha\cdot s}}{\sqrt{2\cdot g\cdot \sin\beta\cdot s}}$$

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta}}$$

$$\frac{v_1}{v_2}=1{,}22$$

Neben der Geschwindigkeit ist aber auch die Masse für den Impuls entscheidend. Und da ist

$$m_1=\frac{1}{2}m_2$$

Die größere Geschwindigkeit von Wagen 1 wird als durch die größere Masse von Wagen 2 wett gemacht. Damit hat Wagen 2 einen größeren Impuls und die Bewegung geht in Richtung B weiter.

Die Geschwindigkeit lässt sich über den Impulserhaltungssatz berechnen:

$$u=\frac{m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2}{m_1+m_2}$$

Da die Körper in unterschiedliche Richtungen fahren, wird die 2. Geschwindigkeit negativ eingesetzt.

$$u=\frac{m_1\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot \sin\alpha\cdot s}-2\cdot m_1\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot \sin\beta\cdot s}}{3m_1}$$

$$u=\frac{m_1\cdot\left(\sqrt{2\cdot g\cdot \sin\alpha\cdot s}-2\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot \sin\beta\cdot s}\right)}{3m_1}$$

$$u=\frac{1}{3}\sqrt{2\cdot g\cdot \sin\alpha\cdot s}-2\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot \sin\beta\cdot s}$$

$$u=-0{,}53\,\frac{m}{s}$$

Das negative Vorzeichen besagt, dass die gekoppelten Wagen in Richtung B fahren.

d) Die gesamte kinetische Energie wird in thermische Energie umgewandelt, wenn die gekoppelten Wagen nach dem Stoß stehenbleiben. Das ist nur möglich, wenn die beiden Wagen vor dem Stoß gleiche Impulsbeträge haben. Dazu muss entweder der Winkel Alpha vergrößert oder der Winkel Beta verkleinert werden.

$$|p_1|=|p_2|$$

$$m_1\cdot v_1=m_2\cdot v_2$$

$$m_1\cdot v_1=2\cdot m_1\cdot v_2$$

$$m_1\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot \sin\alpha\cdot s}=2\cdot m_1\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot \sin\beta\cdot s}$$

$$m_1^2\cdot 2\cdot g\cdot \sin\alpha\cdot s=4\cdot m_1^2\cdot 2\cdot g\cdot \sin\beta\cdot s$$

$$\sin\alpha=4\cdot\sin\beta$$

Damit kann entweder der eine oder der andere Winkel berechnet werden.

$\alpha=44°$

oder $\beta=3{,}7°$