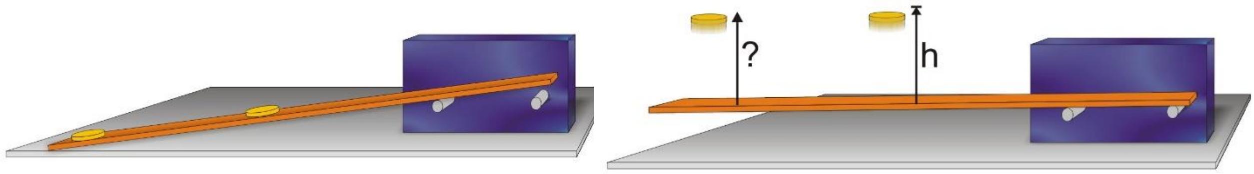
Aufgaben zu senkrechten und waagerechten Würfen

894.



Ein 50 cm langes Lineal wird bei 10 cm drehbar gelagert. Bei 30 cm und 50 cm liegen zwei gleiche Geldstücke. Das rechte Ende wird schnell nach unten gedrückt, so dass die Geldstücke nach oben geschleudert werden. Das Geldstück bei 30 cm erreicht eine bestimmte Höhe. Wie hoch fliegt im Vergleich dazu das Geldstück bei 50 cm?
a) Genauso hoch.
b) Etwa doppelt so hoch.
c) Deutlich mehr als doppelt so hoch.

950. Der folgende Text stammt aus MAKE: 4/2016, Seite 20 (Maker Media GMBH) und darf mit freundlicher Genehmigung des Verlages verwendet werden.
Im Text sind einige Fehler enthalten. Finden Sie diese Fehler und korrigieren Sie die Aussagen.

WURFPARABELN

Wenn wir wissen wollen, wie wir die Plüschtiere, Bälle und Raketen am besten abschießen, müssen wir uns mit der Ballistik befassen. Die Übersetzung des Wortes Ballistik lautet „Lehre von den geworfenen Körpern". Sie gehört zur Physik und beschreibt, welchen Kräften ein Körper ausgesetzt ist, wenn er sich durch die Luft bewegt. Wie jeder Mensch, dem einmal etwas heruntergefallen ist, weiß, sind alle Gegenstände der Schwerkraft ausgesetzt. Wenn wir einen Gegenstand also einfach nur loslassen, fällt er gerade nach unten. Wenn wir ihn mit Kraft waagerecht von uns wegwerfen, fliegt er erst ein Stück geradeaus, bevor er beginnt, zu fallen. Für die Weite des Wurfs oder Schusses und die Aufprallgeschwindigkeit ist entscheidend, mit welcher Kraft beziehungsweise Geschwindigkeit und in welchem Winkel wir etwas werfen.

Geworfene Gegenstände bewegen sich immer in einem Bogen – außer wir werfen etwas senkrecht zu Boden. Diesen Bogen nennt man die Wurfparabel. Je steiler nach oben wir etwas abwerfen, desto kürzer ist die Strecke, die wir überwinden. Auch wenn wir etwas waagerecht von uns wegwerfen, fällt es irgendwann zu Boden, weil die Geschwindigkeit, mit der wir es abgeworfen haben, abnimmt und die Geschwindigkeit, mit der es zur Erde fällt, gleichzeitig stärker wird. Die Fallbeschleunigung hängt mit der Geschwindigkeit der Erdumdrehung zusammen und liegt bei 9,81 m/s². Sobald wir einen Gegenstand abgeworfen haben, beschleunigt er also pro Sekunde mit 9,81 m/s in Richtung Boden. Generell gilt: Wenn wir besonders weit werfen wollen, sollten wir den Gegenstand in einem 45°-Winkel nach oben abwerfen. Wollen wir aber ein relativ nah stehendes Ziel mit viel Kraft treffen, so sollten wir möglichst waagerecht werfen.

1016. Im neu gebauten Freibad hat das Sprungbecken für den 10-m-Turm die Abmessung 18m mal 18 m. Die 5 m lange und 10 m hohe Plattform ragt 3 m in das Becken hinein.
Bei der Sicherheitsabnahme des Bades kamen Bedenken auf, dass ein Turmspringer den gegenüberliegenden Rand des Beckens erreichen könnte.
Untersuchen Sie, ob diese Bedenken gerechtfertigt sind.

984. Die erste Etage am Pont du Gard hat eine Höhe 22,0 m. Von dieser Höhe lässt man einen Stein in den Gardon frei fallen
Ein zweiter Stein wird mit 10,0 m/s nach unten geworfen und erreicht gleichzeitig mit dem ersten Stein den Fluss. Wieviel später wurde der zweite Stein geworfen?
(Die bremsende Wirkung der Luft wird vernachlässigt)
PS: Wer den Pont du Gard nicht kennt, informiert sich bitte.

732. Beim Bogenschießen erreicht der Pfeil Geschwindigkeiten von bis zu 100 m/s. Es wird auf Scheiben in Entfernungen bis 70 m (Frauen) bzw. bis 90 m (Männer) geschossen.
a) Welche Weite erreicht ein Pfeil, wenn er aus 1,70 m Höhe waagerecht abgeschossen wird und schließlich auf den Boden auftrifft?
b) Um wie viel Zentimeter ist der Pfeil bei den Entfernungen der Scheiben bei Frauen und Männern gefallen?

574. Beim Handball wird ein Ball zum Tippen mit 25 km/h nach unten geworfen.
a) Mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Ball auf dem Boden auf?
b) Nach welcher Zeit kommt er zur Hand des Spielers zurück. Die Hand befindet sich beim Abwurf und beim Zurückkommen in 70 cm Höhe.

Lösungen

894. c) Deutlich mehr als doppelt so hoch.
Das Hochfliegen des Geldstückes ist ein senkrechter Wurf. Dabei wird die kinetische Energie, die das Stück beim Verlassen des Lineals hat, komplett in potentielle Energie umgewandelt:

$$E_{kin} = E_{pot}$$

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$$

Das wird nach der Höhe h umgestellt:

$$\frac{1}{2} \cdot v^2 = g \cdot h$$

$$h = \frac{v^2}{2\,g}$$

Die Höhe ist damit proportional zur Abwurfgeschwindigkeit zum Quadrat.

Um eine Aussage über die Flughöhe machen zu können, muss also untersucht werden, wie sich die Abwurfgeschwindigkeiten verhalten.
Die Geldstücke bewegen sich vom Start (Ruhe) bis zum Verlassen des Lineals beschleunigt. Wenn man vereinfacht annimmt, das es eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist, gilt:

$$v = a \cdot t$$

Die Beschleunigungszeit ist für beide Stücke gleich groß. Über die Beschleunigung a erhält man eine Aussage über

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Da die Zeiten bei beiden Bewegungen gleich sind, ist die Beschleunigung proportional zum Beschleunigungsweg.
Der Weg ist Teil einer Kreisbahn, also Teil des Umfangs eines Kreises. Der Kreisumfang berechnet sich mit

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Der Umfang ist proportional zum Radius. Bei dem äußeren Geldstück ist der Radius genau doppelt so groß wie bei dem inneren Geldstück.
Damit legt das äußere Geldstück den doppelten Beschleunigungsweg zurück und verlässt das Lineal auch mit der doppelten Geschwindigkeit.
Da die Flughöhe aber proportional zum Quadrat der Abwurfgeschwindigkeit ist, fliegt das Geldstück unter idealen Bedingungen viermal so hoch wie das andere Stück.

950. Jeder findet selber wenigstens drei Fehler. Aufschreiben.

1016. Der Sprung vom 10-m-Turm kann nur dann gefährlich werden, wenn man mit Anlauf springt. Dadurch wird der Sprung zu einem waagerechten Wurf und man kann im schlimmsten Fall bis zum Beckenrand springen.
Mit welcher Geschwindigkeit muss man nun für diesen Ernstfall von der Plattform springen, also wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit mindestens sein?
Für den waagerechten Wurf gilt:

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2$$

Die Gleichung wird erst mal nach der gesuchten Anfangsgeschwindigkeit umgestellt:

$$v_0^2 = -\frac{g}{2 \cdot y} \cdot x^2$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{g}{2 \cdot y} \cdot x^2}$$

y ist die Höhe des Turmes. Da die Bewegung nach unten geht, wird der Wert negativ eingetragen. Damit entfällt in der Berechnung das Minus unter der Wurzel.
X ist die Wurf- oder hier die Sprungweite. Das Becken ist 18 m lang. Davon werden noch die 3 m abgezogen, die die Plattform über den Beckenrand ragt.
Damit kann nun die Geschwindigkeit berechnet werden:

$$v_0 = \sqrt{-\frac{9{,}81\frac{m}{s^2}}{2 \cdot -10\,m} \cdot (15\,m)^2}$$

$$v = 10{,}5\,\frac{m}{s}$$

$$v = 37{,}8\,\frac{km}{h}$$

Der Springer müsste also mit $10{,}5\,\frac{m}{s}$ vom Turm springen, um gerade so den gegenüberliegenden Rand zu erreichen. Wie wahrscheinlich ist das, dass ein Springer das schafft?
Der Weltrekord für den 100-m-Lauf liegt seit 2009 bei 9,58 s. Das entspricht einer Geschwindigkeit von $10{,}4\,\frac{m}{s}$. Vom Turm müsste man noch etwas schneller sein. Durch eine wissenschaftliche Argumentation können die Bedenken hoffentlich zerstreut werden.

984. Wie lange braucht der erste Stein, um aus dieser Höhe bis zum Fluss zu fallen? Es ist ein einfacher freier Fall und es gilt:

$$s = -\frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{-\frac{2 \cdot s}{g}}$$

das Minus verwirrt etwas, bedeutet aber nicht anderes, als das der Nullpunkt des Bezugssystems am Abwurfpunkt des Steines liegt. Damit wird der zurückgelegte Weg nach unten auch negativ.

$$t = \sqrt{-\frac{2 \cdot -22\,m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}}$$

$$t = 2{,}1\,s$$

Für den Wurf nach unten gilt:

$$s = -v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

t ist die Zeit, die ein Körper braucht, um mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 den Weg s zurückzulegen. Da die Anfangsgeschwindigkeit und der Weg bekannt sind, kann die Flugzeit berechnet werden. Die Gleichung stellt eine quadratische Funktion dar und wird dem entsprechend behandelt.
Der konventionelle Weg geht über die Lösungsformel. Einfacher ist der Einsatz eines Solver.
Der konventionelle Weg sieht so aus:

$$s = -v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$0 = -v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 - s \qquad \left| \cdot \left(-\frac{2}{g} \right) \right.$$

$$0 = \frac{2 \cdot v_0}{g} \cdot t + t^2 + \frac{2\,s}{g}$$

Nach dem Ordnen hat man die Normalform:

$$0 = t^2 + \frac{2 \cdot v_0}{g} \cdot t + \frac{2\,s}{g}$$

Mit der Lösungsformel erhält man die gesuchte Zeit:

$$t_{1/2} = -\frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g} \right)^2 - \frac{2 \cdot s}{g}}$$

Beim Einsetzten muss man auf die Vorzeichen achten: Der Weg ist negativ!

$$t_{1/2} = -\frac{10\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{10\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} \right)^2 + \frac{2 \cdot 22\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}$$

$$t_{1/2} = -1{,}02\,s \pm \sqrt{1{,}04\,s^2 + 4{,}49\,s^2}$$

$$t_{1/2} = -1{,}02\,s \pm 2{,}35\,s$$

$$t_1 = 1{,}33\,s$$

Die zweite Zeit ist negativ und physikalisch nicht so sinnvoll.
Das Ergebnis ist die Flugzeit für den zweiten Stein. Der erste brauchte ja 2,11 s, um unten anzukommen. Damit beide unten ankommen, muss der zweite Stein 0,77 s nach dem ersten geworfen werden.

732.

geg.:	$v_x = 100\,\frac{m}{s}$ $x_F = 70\,m$ $x_M = 90\,m$ $h = 1{,}70\,m$	ges.:	

Lösung:	a) Der Pfeil bewegt sich auf einer Wurfparabel, die sich nach der Gleichung: $y = -\frac{g}{2 \cdot v_x^2} \cdot x^2$ beschreiben lässt. Das y ist der Weg des Pfeils nach unten. Für die erste Aufgabe ist dieser Wert mit 1,70 m vorgegeben. Der Flugweite ist der dazugehörige Weg in x-Richtung. $y = -\frac{g}{2 \cdot v_x^2} \cdot x^2$ $y \cdot 2 \cdot v_x^2 = -g \cdot x^2$ $x = \sqrt{-\frac{y \cdot 2 \cdot v_x^2}{g}}$ Da der Pfeil nach unten fliegt, wird der y-Wert negativ und der Ausdruck unter der Wurzel wieder positiv. $x = \sqrt{\frac{1{,}70\,m \cdot 2 \cdot \left(100\,\frac{m}{s}\right)^2}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}$ $x = 58{,}9\,m$ b) Es muss der Weg in y-Richtung für die beiden gegebenen x-Werte berechnet werden. $y = -\frac{g}{2 \cdot v_x^2} \cdot x^2$ $y = -\frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{2 \cdot \left(100\,\frac{m}{s}\right)^2} \cdot (70\,m)^2$ $y_F = -2{,}4\,m$ $y_M = -4{,}0\,m$
Antwort:	a) Wenn der Pfeil waagerecht abgeschossen wird, fliegt er maximal 58,9 m weit. Deshalb muss beim Bogenschießen der Schuss nach oben gehen (schräger Wurf) b) Bei den Frauen fällt der Pfeil 2,4 m und bei den Männern 4,0 m nach unten.

574.

geg.:	$v = 6{,}9\,\frac{m}{s}$ $h = 0{,}7\,m$	ges.:	t

Lösung:	Die gesuchte Zeit setzt sich aus zwei Zeiten zusammen: die für den Weg nach unten und die für den Weg nach oben. Die beiden Bewegungen verlaufen symmetrisch, das heißt, die Zeiten sind gleich groß. Der senkrechte Wurf nach unten ist die Summe aus zwei Bewegungen: der Bewegung, die sich aus der Anfangsgeschwindigkeit ergibt (gleichförmig) und dem freien Fall (gleichmäßig beschleunigt). Der zurückgelegte Weg berechnet sich aus der Summe der beiden Wege $s = s_1 + s_2$ $s = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$ die Geschwindigkeit aus der Anfangsgeschwindigkeit plus dem Geschwindigkeitszuwachs durch den freien Fall. $v = v_0 + g \cdot t$ Mit der ersten Gleichung lässt sich die Zeit für den Weg von der Hand bis zum Boden berechnen: $s = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$ $0 = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t - s$ $0 = t^2 + \frac{2 \cdot v_0}{g} \cdot t - \frac{2 \cdot s}{g}$ $t_{1/2} = -\frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2 \cdot s}{g}}$ $t_{1/2} = -\frac{6{,}9\,\frac{m}{s}}{9{,}81\frac{m}{s^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{6{,}9\,\frac{m}{s}}{9{,}81\frac{m}{s^2}}\right)^2 + \frac{2 \cdot 0{,}7\,m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}}$ $t_{1/2} = -0{,}7\,s \pm \sqrt{(0{,}7\,s)^2 + 0{,}14\,s^2}$ $t_{1/2} = -0{,}7\,s \pm 0{,}79$ $t_1 = 0{,}09\,s$ Die zweite Zeit ist negativ und fällt weg. Nun lässt sich die Geschwindigkeit berechnen: $v = v_0 + g \cdot t$ $v = 6{,}9\,\frac{m}{s} + 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}09\,s$ $v = 7{,}8\,\frac{m}{s}$
Antwort:	Der Ball kommt mit einer Geschwindigkeit von 7,8 m/s auf und ist nach 0,18 s wieder an der Hand des Ballspielers.