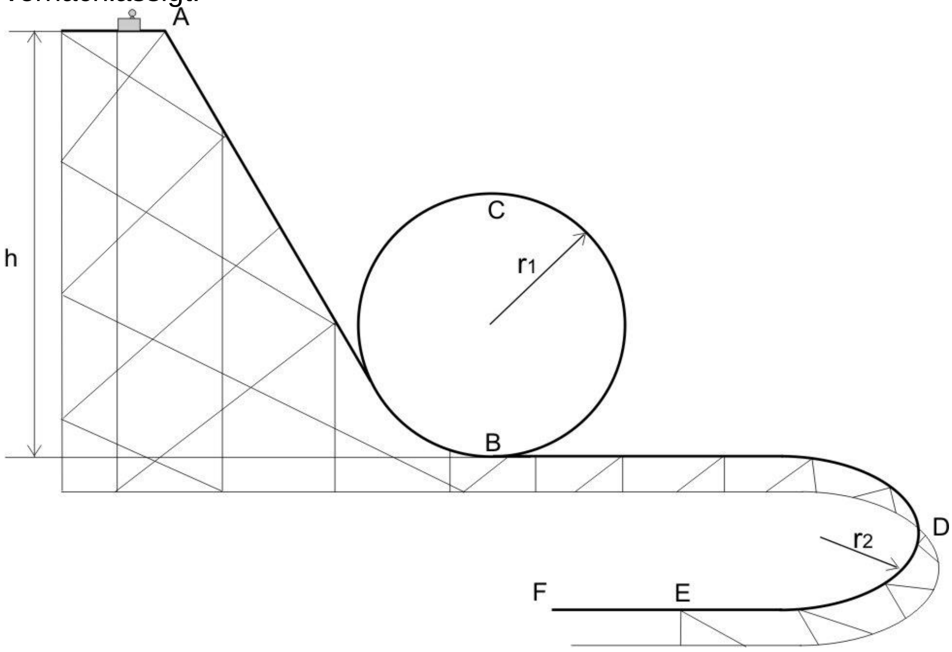
2. Klausur Physik Leistungskurs
18.1.2023
Dauer: 90 min

1. E_1 ist der Energiebetrag, um einen PKW aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit v_1 zu beschleunigen. E_2 ist der Energiebetrag, um den PKW von v_1 auf $v_2 = 2 \cdot v_1$ zu beschleunigen. In welchem Verhältnis $\frac{E_1}{E_2}$ stehen die Energiebeträge? (1)

a) $\frac{2}{1}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{1}$ e) $\frac{1}{3}$

2. Die Abbildung zeigt den schematischen Aufbau einer Achterbahn aus Looping und waagerechtem Halbkreis. Für die folgenden Aufgaben werden alle Reibungseinflüsse vernachlässigt.



a) Im Punkt C muss aus Sicherheitsgründen die Geschwindigkeit **50% über der nötigen Mindestgeschwindigkeit** liegen. Zeigen Sie, dass dann die Gleichung

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot g \cdot r_1}$$

gilt. (5)

b) Im Punkt A hat der Wagen eine Geschwindigkeit von $1{,}0 \frac{m}{s}$, die sich auf $24 \frac{m}{s}$ im Punkt B steigert. Aus welcher Höhe ist der Wagen gestartet? (3)

c) Berechnen Sie den Radius des Loopings.(5)

d) Im Wagen sitzt eine Person mit einer Masse von 70 kg. Mit welcher Kraft wird sie während der Fahrt durch den Looping **maximal** in den Sitz gepresst? (4)

e) Zeigen Sie, dass diese Kraft **unabhängig vom Radius** des Looping ist, wenn er im oberen Teil wieder mit 150% der Mindestgeschwindigkeit durchfahren werden soll. (4)

Bitte wenden.

f) Der nach dem Looping folgende Halbkreis mit r_2=10 m Radius soll so durchfahren werden, dass keine seitlichen Kräfte auftreten. Dazu muss die die Bahn nach innen geneigt werden. Wie groß muss der **Neigungswinkel** sein? (Hinweis: eine waagerechte Bahn hat einen Neigungswinkel von 0°) (3)

g) Auf der Strecke von E nach F wird der Wagen gleichmäßig zum Stillstand abgebremst. Zwei Sekunden nach dem Beginn der Bremsung beträgt die Geschwindigkeit immerhin noch $16\frac{m}{s}$.

Zeichen Sie für den gesamten Bremsvorgang das v(t)-Diagramm. (4)

h) Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms den **Bremsweg** bis zum Stillstand. (3)

i) Welche **Bremskraft** spürt der Fahrgast während des Abbremsens? (2)

Lösungen

1. e) $\frac{1}{3}$

Zum Beschleunigen des Fahrzeuges ist Beschleunigungsarbeit zu leisten. Dafür wird die Energie E benötigt.
Die Beschleunigungsarbeit berechnet sich nach

$W_{B1} = \frac{m}{2} \cdot v^2$, wenn die Beschleunigung aus dem Stand erfolgt. Wenn schon von einer vorhandenen Geschwindigkeit weiter beschleunigt werden soll, gilt

$$W_{B2} = \frac{m}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

Ersetzt man in der letzten Gleichung die Endgeschwindigkeit v_2 durch $2 \cdot v_1$, erhält man

$$W_{B2} = \frac{m}{2} \cdot (4 \cdot v_1^2 - v_1^2)$$

In der Klammer bleibt dann

$$W_{B2} = \frac{m}{2} \cdot (3 \cdot v_1^2)$$

übrig. Und das ist drei Mal so viel wie für die Beschleunigung auf die erste Geschwindigkeit.

2.

a) Als erstes muss gefragt werden, wie groß die Mindestgeschwindigkeit im Punkt C ist. Das ist die Geschwindigkeit, bei der der Wagen gerade noch so durch den oberen Punkt des Loopings kommt.
Im oberen Punkt wirkt wie überall die Gewichtskraft nach unten. Damit er dort nicht herunterfällt, muss eine Kraft in die entgegengesetzte Richtung wirken, die mindestens genau so groß ist. Diese Kraft wird durch die Fliehkraft aufgebracht, die hier als Trägheitskraft radial nach außen wirkt.
Es gilt als für den Minimalfall:

$$F_G = F_F$$

$$m \cdot g = \frac{m \cdot v^2}{r_1}$$

$$g = \frac{v^2}{r_1}$$

$$v = \sqrt{g \cdot r_1}$$

Wie man sieht, hängt die Geschwindigkeit nicht von der Masse ab. Deshalb darf auch jeder Achterbahn fahren!

Die geforderte Geschwindigkeit soll nun um 50% größer sein als die Minimalgeschwindigkeit:

$$v = 1{,}5 \cdot \sqrt{g \cdot r_1}$$

Das kann durch geschickte Umformungen in die gewünschte Form gebracht werden:

$$v_C = \frac{15}{10} \cdot \sqrt{g \cdot r_1}$$

$$v_C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{g \cdot r_1}$$

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt{g \cdot r_1}$$

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot g \cdot r_1}$$

b) Da die Reibung vernachlässigt wird, ist die Energieumwandlung so, dass aus der potenziellen und kinetischen Energie im Punkt A kinetische Energie im Punkt B gemacht wird:

$$E_{kin,A} + E_{pot,A} = E_{kin,B}$$

$$\frac{m}{2} \cdot v_A^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v_B^2$$

Wie man sieht, fliegt die Masse wie so oft raus.

$$\frac{1}{2} \cdot v_A^2 + g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v_B^2$$

Das h ist die gesuchte Größe, nach der die Gleichung umgestellt wird:

$$g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v_B^2 \frac{1}{2} \cdot v_A^2$$

$$h = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2 \cdot g}$$

$$h = \frac{\left(24 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(1 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}}$$

$$h = 29{,}3\,m$$

c) Der gesuchte Radius kann auch über den Energieansatz bestimmt werden. Die kinetische Energie im Punkt B wird in potenzielle Energie im Punkt C umgewandelt. Da im Punkt C aber eine bestimmte Geschwindigkeit notwendig ist, besitzt der Wagen da auch noch kinetische Energie.

$$E_{kin,B} + = E_{pot,C} + E_{kin,C}$$

$$\frac{m}{2} \cdot v_B^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{m}{2} \cdot v_C^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_B^2 = g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot v_C^2$$

Die Höhe h ist der doppelte Radius des Looping:

$$h = 2 \cdot r_1$$

Die Geschwindigkeit im Punkt C wurde bereits im Aufgabenteil a) berechnet:

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot g \cdot r_1}$$

Damit heißt die Gleichung nun:

$$\frac{1}{2} \cdot v_B^2 = g \cdot 2 \cdot r_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} g \cdot r_1$$

und muss nach dem gesuchten Radius umgestellt werden:

$$\frac{1}{2}\cdot v_B^2 = r_1 \cdot \left(g \cdot 2 + \frac{9}{8} g \right)$$

Der Ausdruck in der Klammer liefert

$$2g + \frac{9}{8} g$$

$$\frac{16}{8} g + \frac{9}{8} g$$

$$\frac{25}{8} g$$

Damit heißt die Gleichung

$$\frac{1}{2}\cdot v_B^2 = r_1 \cdot \frac{25}{8} g$$

$$v_B^2 = r_1 \cdot \frac{25}{4} g$$

$$r_1 = \frac{4 \cdot v_B^2}{25 \cdot g}$$

$$r_1 = \frac{4 \cdot \left(24 \frac{m}{s} \right)^2}{25 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}}$$

$$r_1 = 9{,}4\,m$$

d) Man muss zuerst fragen, an welcher Stelle der Fahrer die größte Kraft spürt? Das ist eindeutig im Punkt B. Während der gesamten Fahrt spürt er natürlich seine Gewichtskraft. Im Looping kommt die Fliehkraft dazu. Sie wirkt im Punkt B genau in Richtung der Schwerkraft und addiert sich zu dieser. Gleichzeitig ist dort die Geschwindigkeit am größten, so dass auch die Fliehkraft einen Maximalwert erreicht.
Im Punkt B gilt:

$$F = F_G + F_F$$

$$F = m \cdot g + \frac{m \cdot v_B^2}{r}$$

$$F = 70\,kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} + \frac{70kg \cdot \left(24 \frac{m}{s} \right)^2}{9{,}4\,m}$$

$$F = 686{,}7\,N + 4290\,N$$

$$F = 4977\,N$$

Das sind rund 5 kN und das etwa 7,25 fache der Gewichtskraft der Person.
Das ist sehr viel und bedeutet eine hohe Belastung. Aus diesem Grund werden schon lange keine Kreisloopings mehr gebaut. Die Form eines Loopings ist heute ein Klothoid.

e) In die Gleichung für die Kraft wird die Geschwindigkeit im Punkt B durch eine entsprechende Gleichung ersetzt. Wie schon hergeleitet, gilt:

$$v_B^2 = r_1 \cdot \frac{25}{4} g$$

Das wird in die Kraftgleichung eingesetzt:

$$F = m \cdot g + \frac{m \cdot \frac{25}{4} \cdot g \cdot r}{r}$$

Wie zu sehen ist, kürzt sich der Radius einfach raus:

$$F = m \cdot g + \frac{25}{4} m \cdot g$$

Damit kann man allgemein schreiben:

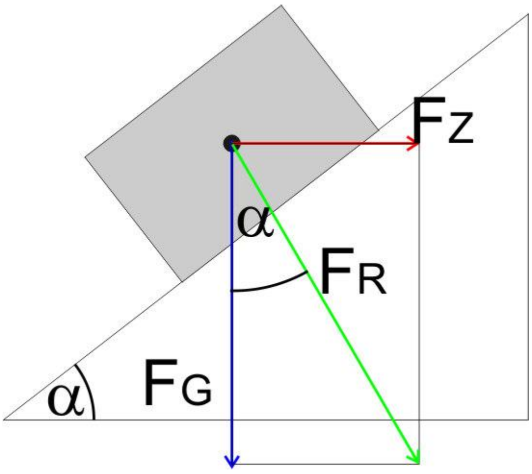
$$F = \frac{4}{4} m \cdot g + \frac{25}{4} m \cdot g$$

$$F = \frac{29}{4} m \cdot g$$

Das entspricht etwa dem 7,25 fachen der Gewichtskraft und das wurde vorhin schon berechnet.

f)

Auf den Wagen wirken in der Kurve zwei Kräfte: die nach unten zeigende Gewichtskraft F_G und die nach außen wirkenden Zentrifugalkraft F_Z. Letztere ist eine Trägheitskraft und genau so groß wie die Radialkraft.
Beide Kräfte erzeugen durch die vektorielle Addition eine resultierende Kraft F_R, die der Wagen dann spürt.
Keine Seitenkräfte wirken, wenn die resultierende Kraft genau senkrecht auf den Untergrund drückt. Die muss also so geneigt sein, dass bei der gegebenen Geschwindigkeit diese Bedingung erfüllt ist.



Alpha ist der gesuchte Winkel. Er taucht zwischen der Gewichtkraft und der resultierenden Kraft nochmals auf, da die Schenkel der beiden Winkel senkrecht aufeinander stehen.
Es sollte zu sehen sein, das gilt:

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G}$$

Damit erhält man

$$\tan\alpha = \frac{m \cdot v^2}{r_2 \cdot m \cdot g}$$

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{r_2 \cdot g}$$

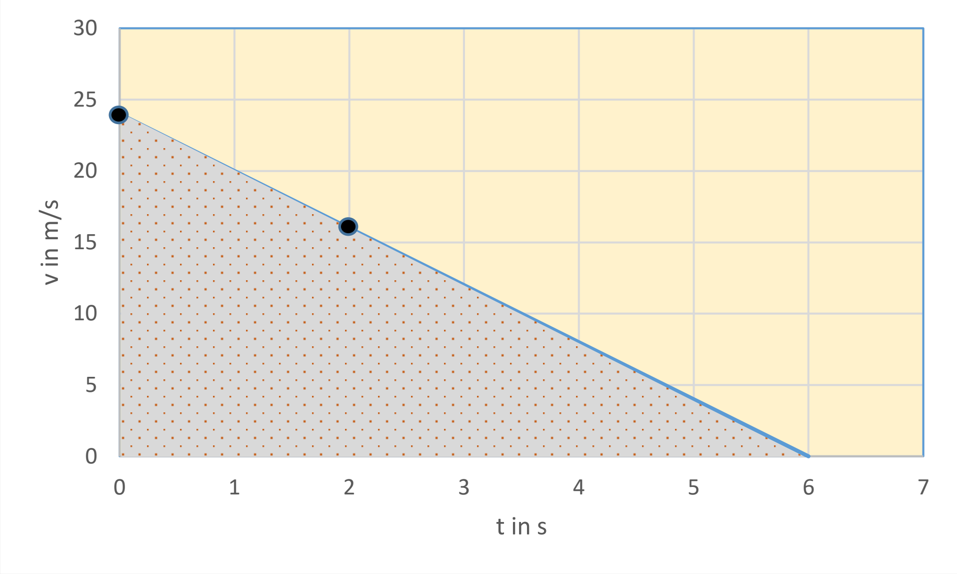
Der Radius ist bekannt. Aber wie groß ist die Geschwindigkeit. Kein Problem: es werden ja die Reibungskräfte vernachlässigt. Die würden alles noch viel komplizierter machen, sollten aber von Achterbahnkonstrukteuren berücksichtigt werden!
Die Geschwindigkeit ist so groß wie im Punkt B. Im Looping werden die Energieformen ja nur ineinander umgewandelt. Nach dem Energieerhaltungssatz ist aber die kinetische Energie vor und nach dem Looping gleich groß und damit auch die Geschwindigkeit. Nun denn:

$$\tan\alpha = \frac{\left(24\frac{m}{s}\right)^2}{10\,m \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}$$

$$\alpha = 80°$$

Die Bahn muss um 80° gegen die Waagerechte geneigt sein.

g)



h) Die gesuchte Strecke entspricht der Fläche unter der Kurve, die hier eine dreieckige Form hat. Dieser Flächeninhalt muss berechnet werden:

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t$$

$$s = \frac{1}{2} 24 \frac{m}{s} \cdot 6\,s$$

$$s = 72\,m$$

i) Die Kraft ist nach dem Grundgesetz

$$F = m \cdot a$$

Die Beschleunigung ist

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Damit kann die Kraft berechnet werden:

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F = 70\,kg \cdot \frac{24 \frac{m}{s}}{6\,s}$$

$$F = 280\,N$$