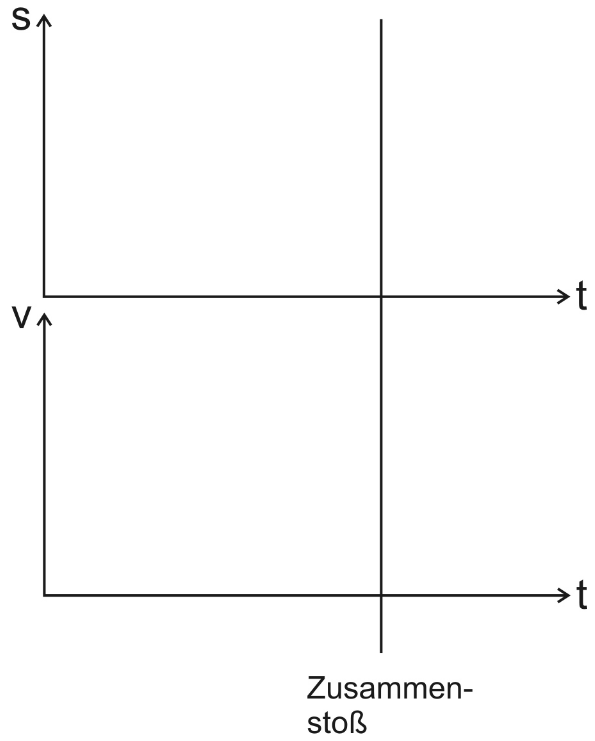
Treffpunkte, Überholvorgänge

1. Vor einem Interregio, der mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h fährt, taucht plötzlich aus dem Nebel in 230 m Entfernung ein Güterzug auf, der in derselben Richtung mit 40 km/h fährt. Der Interregio bremst sofort mit der bei Zügen üblichen Bremsverzögerung von 1m/s².
a) Skizzieren Sie in ein s-t- und ein v-t-Diagramm die Bewegung beider Züge. Benutzen Sie für jeden Zug eine andere Farbe. (6)
b) Leiten Sie eine Gleichung her für die Zeit vom Beginn den Bremsens bis zum Zusammenstoß. Wie viele Lösungen sind möglich? (5)
c) Geben Sie die Zeit an, nach der der Interregio auf den Güterzug prallt. (1)

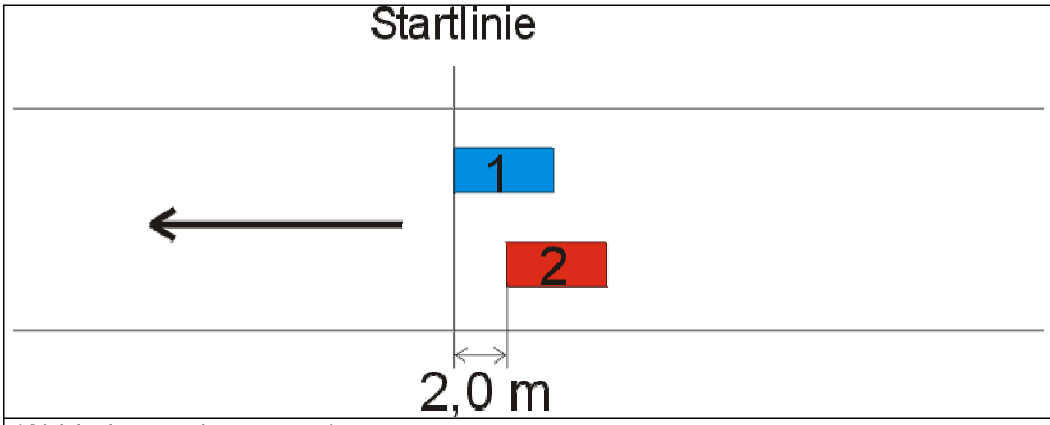


Aufgaben ohne Lösung:
Lösen Sie die Aufgabe c) mit Hilfe des grafischen Taschenrechners und dem Modellierungsprogramm Moebius

2. Ich fahre mit 130 km/h auf der rechten Spur der Autobahn und nähere mich einem mit 100 km/h fahrenden LKW von 10 m Länge. Als ich 100 m hinter dem LKW bin und zum Überholen ansetzen will, fahre ich an der Anzeigetafel 1000 m vor meiner Abfahrt vorbei. Wie weit vor der Abfahrt schließt man den Überholvorgang ab, wenn man ordnungsgemäß im 2-s-Abstand vor dem LKW wieder auf die rechte Fahrbahn wechselt? Mein Auto hat eine Länge von 4 m.
(2-s-Abstand: Sicherheitsabstand zwischen zwei Fahrzeugen; ist der Abstand, den ein Fahrzeug in 2 s zurücklegt.)

3. Ein 15 m langer Lastzug fährt mit einer Geschwindigkeit von 54 km/h so vor sich hin. Ein PKW mit 4 m Länge überholt ihm mit der konstanten Geschwindigkeit von 90 km/h, indem er 35 m hinter dem LKW ausschert und sich 35 m vor dem LKW wieder einordnet.
Dem überholenden PKW kommt ein Auto mit 108 km/h entgegen.
Bei welchem Abstand der beiden PKW darf der Überholende noch zum Überholen ansetzen, ohne sein Leben und das Leben des anderen PKW-Fahrers zu gefährden?
(Die Abstände sind immer die freien Strecken zwischen den Autos)

4.



(Abi-Leistungskurs 2004)
Die Abbildung zeigt die Startaufstellung zweier Rennwagen. Die Fahrzeuge bewegen sich unmittelbar nach dem Start mit der konstanten Beschleunigung 9,0 m/s². Durch ein besseres Reaktionsvermögen startet der Fahrer des Fahrzeuges 2 um 0,20 s früher. Bestimmen Sie die Entfernung von der Startlinie, bei der die beiden Frontseiten beider Fahrzeuge genau nebeneinander sind.

5. (Abi 2007)
Ein Lieferwagen der Masse 2,5 t wird aus dem Stillstand durch eine konstante Kraft mit dem Betrag 3,0 kN beschleunigt. Nachdem die Geschwindigkeit $72\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht ist, fährt der Lieferwagen gleichförmig weiter. Zum Zeitpunkt des Losfahrens befindet sich 45 m hinter dem Lieferwagen ein PKW, der sich mit der konstanten Geschwindigkeit $54\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in die gleiche Richtung bewegt.

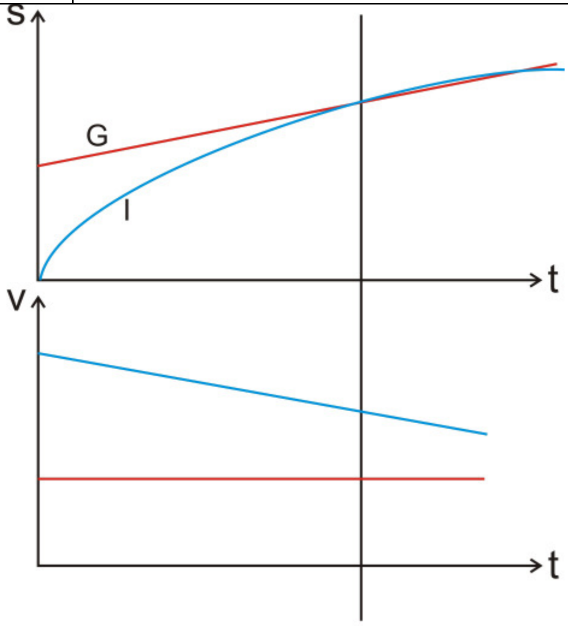
a) Berechnen Sie den Weg, den der Lieferwagen in den ersten 30 Sekunden nach dem Losfahren zurücklegt.

b) Die Bewegung des Lieferwagens wird in den ersten 30 Sekunden nach dem Losfahren vom Fahrer des PKW beobachtet.
Zeichen Sie das v(t) – Diagramm für die Bewegung des Lieferwagens bezogen auf ein System, in dem der PKW ruht.

c) Während der Fahrt befinden sich Lieferwagen und PKW genau zweimal nebeneinander. Bestimmen Sie die Entfernung dieser Orte voneinander.

Lösungen

1.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$v_S = 120\,\frac{km}{h} = 33{,}3\,\frac{m}{s}$
$v_G = 40\,\frac{km}{h} = 11{,}1\,\frac{m}{s}$
$a = -1\,\frac{m}{s^2}$
$s_0 = 230\,m$</td><td>ges.:</td><td>s</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Lösung:</td><td>Der Bezugspunkt der beiden Bewegungen wird in den Interregio gelegt. Zu Beginn der Bremsvorganges hat er der Weg 0 zur Zeit 0 zurückgelegt. Der Güterzug befindet sich 230 m vor diesem Nullpunkt.
Damit lassen sich die Bewegungsgleichungen aufstellen:
$s_I = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_I \cdot t$
$s_G = v_G \cdot t + s_0$</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Die beiden Züge prallen zusammen, wenn die Wege gleich groß sind, also
$s_I = s_G$
$\frac{a}{2} \cdot t^2 + v_I \cdot t = v_G \cdot t + s_0$
Die Zeit ist in dieser Gleichung die einzige Unbekannte und kann berechnet werden. Da sie sowohl quadratisch als auch linear auftaucht, ist das eine quadratische Gleichung und muss auch so gelöst werden.,
$\frac{a}{2} \cdot t^2 + v_I \cdot t = v_G \cdot t + s_0$
$v_I \cdot t = -\frac{a}{2} \cdot t^2 + v_G \cdot t + s_0$
$0 = -\frac{a}{2} \cdot t^2 - v_I \cdot t + v_G \cdot t + s_0$
$0 = t^2 + \frac{2 \cdot v_I}{a} \cdot t - \frac{2 \cdot v_G}{a} \cdot t - \frac{2 \cdot s_0}{a}$
$0 = t^2 + \frac{2 \cdot (v_I - v_G)}{a} \cdot t - \frac{2 \cdot s_0}{a}$
Nun liegt die Gleichung in der Normalform vor und kann mit der bekannten Lösungsvorschrift gelöst werden.</td></tr>
</table>

$$t_{1/2} = -\frac{v_I - v_G}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_I - v_G}{a}\right)^2 + \frac{2 \cdot s_0}{a}}$$

$$t_{1/2} = \frac{22{,}2\,\frac{m}{s}}{1\,\frac{m}{s^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{22{,}2\,\frac{m}{s}}{1\,\frac{m}{s^2}}\right)^2 - \frac{2 \cdot 230\,m}{1\,\frac{m}{s^2}}}$$

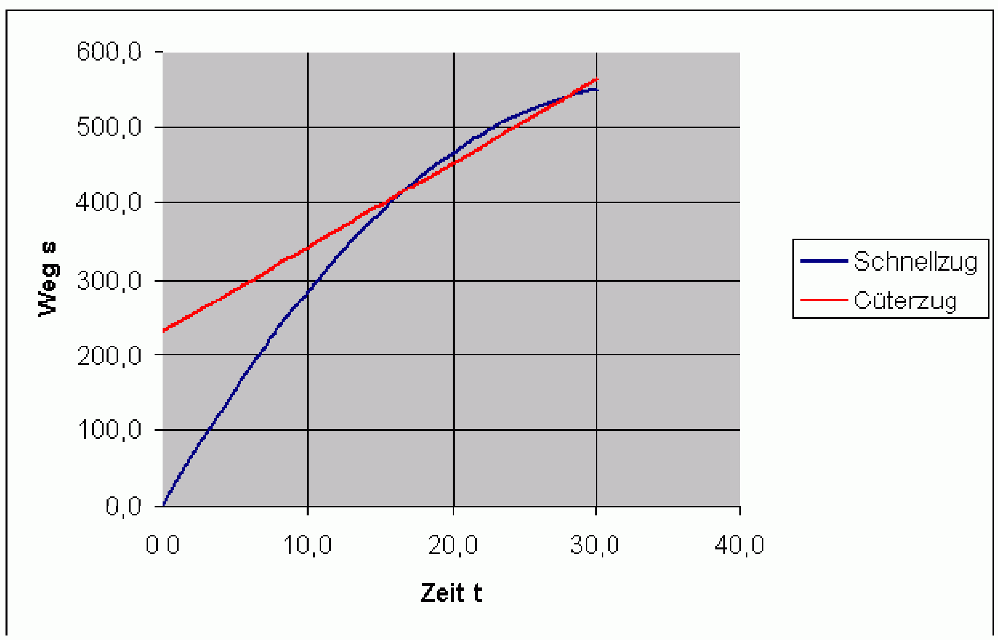
$$t_1 = 22{,}2\,s + 5{,}7\,s$$

$$t_1 = 27{,}9\,s$$

$$t_2 = 22{,}2\,s - 5{,}7\,s$$

$$t_2 = 16{,}5\,s$$

Der Zusammenstoß erfolgt nach 16,5 s. Die zweite Zeit fällt weg, da sie nur einmal zusammenstoßen können.
Wenn sie nebeneinander fahren würden, wäre eine zweite Begegnung möglich. Erst überholt der Interregio den Güterzug und dann fährt der Güterzug an dem immer langsamer werdenden Interregio vorbei.



Antwort:	Der Schnellzug prallt nach 16,5 s auf den Güterzug auf.

2.

geg.:	$v_P = 130\frac{km}{h}$ $v_L = 100\frac{km}{h}$ $s_{P-L} = 100\,m$ $s_A = 1000\,m$ $s_L = 10\,m$	ges.:	s
Lösung:	Die Frage ist, wie viel m vor der Abfahrt kann ich vor dem LKW wieder auf die rechte Spur kommen. Dabei muss der 2 s-Abstand eingehalten werden. Dass heißt, der Sicherheitsabstand zwischen dem LKW und mir muss so groß sein, wie der LKW in 2 s fährt. $v = \frac{s}{t}$ $s = v \cdot t$ $s = 27{,}8\frac{m}{s} \cdot 2\,s$ $s = 55{,}6\,m$ Welchen Weg muss ich insgesamt zurücklegen? Als erstes nimmt man an, dass der LKW steht und ich an ihm mit der Differenzgeschwindigkeit vorbei fahre. Die Differenzgeschwindigkeit beträgt 30 km/h. Wie groß ist der Weg bei stehendem LKW? Mein Abstand zum LKW vor dem Überholen + die Länge des LKW + die Länge meines Autos + der Abstand LKW - Auto nach dem Überholen. Mein Auto ist 4 m lang. Also: $s = 100\,m + 10\,m + 4\,m + 55{,}6\,m$ $s = 169{,}6\,m$ Wie lange brauche ich dafür mit 30 km/h? $v = \frac{s}{t}$ $t = \frac{s}{v}$ $t = \frac{169{,}6\,m}{8{,}3\,\frac{m}{s}}$ $t = 20{,}4\,s$ Wie weit fahre ich nun aber wirklich in dieser Zeit? $v = \frac{s}{t}$ $s = v \cdot t$ $s = 36{,}1 \cdot 20{,}4\,s$ $s = 736{,}7\,m$ Der Überholvorgang ist nach 736,7 m abgeschlossen.		
Antwort:	Bis zur Ausfahrt bleiben noch 264 m.		

3.

geg.:	$\ell_L = 15\,m$ $\ell_{PKW} = 4\,m$ $s_S = 35\,m$ $v_L = 54\,\frac{km}{h}$ $v_{PKW1} = 90\,\frac{km}{h}$ $v_{PKW2} = 108\,\frac{km}{h}$	ges.:	s
Lösung:	Der gesuchte Weg s setzt sich aus zwei Teilwegen zusammen, dem Weg, den der 1. PKW zum Überholen braucht (s_1) und dem Weg, den der 2 PKW in der Überholzeit fährt (s_2). Als erstes werden der Überholweg und die Überholzeit berechnet. Als Bezugssystem kann der fahrende LKW benutzt werden. Damit hat er keine Geschwindigkeit und der PKW1 fährt mit der Differenzgeschwindigkeit an ihm vorbei. Die Differenzgeschwindigkeit: $v_D = v_{PKW1} - v_L$ $v_D = 25\,\frac{m}{s} - 15\,\frac{m}{s}$ $v_D = 10\,\frac{m}{s}$ Welchen Weg muss der PKW1 zurücklegen, wenn der LKW als ruhend betrachtet wird? Die beiden Sicherheitsabstände von je 35 m, die Länge des LKW von 15 m und seine eigene Länge von 4 m. Das sind zusammen 89 m. Damit kann die Überholzeit berechnet werden: $v_D = \frac{s}{t_Ü}$ $t_Ü = \frac{s}{v_D}$ $t_Ü = \frac{89\,m}{10\,\frac{m}{s}}$ $t_Ü = 8{,}9\,s$ Welchen Weg legt der PKW1 in dieser Zeit wirklich zurück? $v_{PKW1} = \frac{s_{PWK1}}{t_Ü}$ $s_{PKW1} = v_{PKW1} \cdot t_Ü$ $s_{PKW1} = 25\,\frac{m}{s} \cdot 8{,}9\,s$ $s_{PKW1} = 222{,}5\,m$ Welchen Weg legt der PKW2 in dieser Zeit zurück? Mit der gleichen Formel erhält man 267 m Damit ergibt sich ein Gesamtweg von 489,5 m.		
Antwort:	Der Abstand der beiden PKW sollte mindestens 490 m betragen. Das ist fast ein halber Kilometer!		

geg.:	$a = 9{,}0\,\frac{m}{s^2}$ $t_A = 0{,}20\,s$ $s_A = 2\,m$	ges.:	s_x
Lösung:	Für den gesuchten Zeitpunkt sind zwei Dinge bekannt: 1. Beide Fahrzeuge sind gleich weit von der Startlinie entfernt. Dabei ist Auto 2 2 m weiter gefahren. $s_x = s_1 = s_2 - s_A$ Das Auto 2 fährt die Strecke s_x zuzüglich den 2 m. Damit ist s_x um 2 m kürzer als s_2 2. Beide Autos sind eigentlich die gleiche Zeit seit dem Start unterwegs. Aber Auto 1 ist 0,2 s weniger gefahren, weil es ja später losgekommen ist. $t_1 = t_2 - 0{,}2\,s$ Die gesuchte Größe steckt in der ersten Aussage. Leider gibt es aber über die Strecke s_1 und s_2 keine Aussagen. Der Weg lässt sich jedoch über die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ausdrücken: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ Damit wird: $s_1 = \frac{a}{2} \cdot t_1^2$ $s_1 = \frac{a}{2} \cdot (t_2 - 0{,}2\,s)^2$ und $s_2 = \frac{a}{2} \cdot t_2^2$ Nun kann in die erste Aussage einsetzen: $\frac{a}{2} \cdot (t_2 - 0{,}2\,s)^2 = \frac{a}{2} \cdot t_2^2 - s_A$ t_2 ist die einzige unbekannte Größe. Nach ihr muss umgestellt werden. $(t_2 - 0{,}2\,s)^2 = t_2^2 - \frac{2 \cdot s_A}{a}$ $t_2^2 - 2 \cdot t_2 \cdot 0{,}2\,s + (0{,}2\,s)^2 = t_2^2 - \frac{2 \cdot s_A}{a}$ $-2 \cdot t_2 \cdot 0{,}2\,s + (0{,}2\,s)^2 = -\frac{2 \cdot s_A}{a}$ $-2 \cdot t_2 \cdot 0{,}2\,s = -\frac{2 \cdot s_A}{a} - (0{,}2\,s)^2$ $t_2 = \frac{s_A}{a \cdot 0{,}2\,s} + \frac{(0{,}2\,s)^2}{0{,}4\,s}$ $t_2 = \frac{5 \cdot 2\,m}{9\,\frac{m}{s^2} \cdot 1\,s} + \frac{0{,}04\,s^2}{0{,}4\,s}$ $t_2 = 1{,}21\,s$ Das ist die Zeit, die Auto 2 bis zur gesuchten Entfernung fährt.		

	Diese Entfernung kann nun berechnet werden: $s_2 = \frac{9\frac{m}{s^2}}{2} \cdot 1{,}21^2\ s^2$ $s_2 = 6{,}59\,m$ Das Auto 1 fährt 0,2 s weniger, also: $s_1 = \frac{9\frac{m}{s^2}}{2} \cdot 1{,}01^2\ s^2$ $s_1 = 4{,}59\,m$ Das Auto 1 fährt 2 m weniger als Auto 2. Die Aufgabe lässt sich auch gut grafisch lösen. Dazu sind die Weg-Zeit-Gesetze für beide Autos aufzustellen und in einen Weg-Zeit-Diagramm darzustellen. Auto 1 $s_1 = \frac{9\frac{m}{s^2}}{2} \cdot t^2$ $s_2 = \frac{9\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (t + 0{,}2\,s)^2 - 2\,m$
Antwort:	Die beiden Autos sind 4,59 m von der Startlinie entfernt auf gleicher Höhe.

5.

geg.:	$m = 2{,}5 \cdot 10^3\,kg$ $F = 3{,}0\,kN$ $v_0 = 0\,\frac{m}{s}$ $v_L = 20\,\frac{m}{s}$ $v_P = 15\,\frac{m}{s}$ $s_0 = 45\,m$ $t = 30\,s$	ges.:	$s_{L(30s)}$
Lösung:	Es liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor. Wie lange dauert es, bis der Lieferwagen seine Endgeschwindigkeit erreicht hat? $v = a \cdot t$ $t = \frac{v}{a}$ Die Beschleunigung lässt sich aus Kraft und Masse nach dem Newtonschen Grundgesetz berechnen: $F = m \cdot a$ $a = \frac{F}{m}$ Und eingesetzt: $t = \frac{v \cdot m}{F}$ $t = \frac{20\,\frac{m}{s} \cdot 2{,}5 \cdot 10^3\,kg}{3 \cdot 10^3\,N}$ $t = 16{,}7\,s$ Damit fährt er die ersten 16,7 s beschleunigt und die restlichen 13,3s gleichförmig. Der Weg setzt sich demnach aus dem Weg der beschleunigten Bewegung und dem Weg der gleichförmigen Bewegung zusammen: $s_{L(30)} = s_{Lb} + s_{Lg}$ $s_{L(30)} = \frac{a}{2} \cdot t_{Lb}^2 + v_1 \cdot t_{Lg}$ $s_{L(30)} = \frac{F}{2 \cdot m} \cdot t_{Lb}^2 + v_1 \cdot t_{Lg}$ $s_{L(30)} = \frac{3{,}0 \cdot 10^3\,N}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3\,kg} \cdot (16{,}7\,s)^2 + 20\,\frac{m}{s} \cdot 13{,}3\,s$ $s_{L(30)} = 167{,}3\,m + 266\,m$ $s_{L(30)} = 433{,}3\,m$		
Antwort:	Während der ersten 30 s legt der Lieferwagen einen Weg von 433,3 m zurück.		

b) Was sieht der Fahrer des PKW? Zu Beginn, also zum Zeitpunkt 0, beträgt die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Fahrzeugen $45\frac{km}{h}$. Da der Lieferwagen immer schneller wird, verkleinert sich die Geschwindigkeit zwischen den Fahrzeugen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt fährt der PKW und der Lieferwagen gleich schnell. Zu diesem Zeitpunkt ist die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Fahrzeugen 0 und wird danach vom Betrag her wieder größer. Unter Berücksichtigung der Richtung wird sie negativ. Wenn der Lieferwagen nicht mehr beschleunigt, also nach den 16,7 s, fahren beide mit einer konstanten Geschwindigkeit. Das bedeutet, dass die Differenz beider Werte ebenfalls konstant bleibt.

Nach welcher Zeit haben beide die gleiche Geschwindigkeit? Dazu muss berechnet werden, nach welcher Zeit der Lieferwagen mit der Geschwindigkeit des PKW fährt.

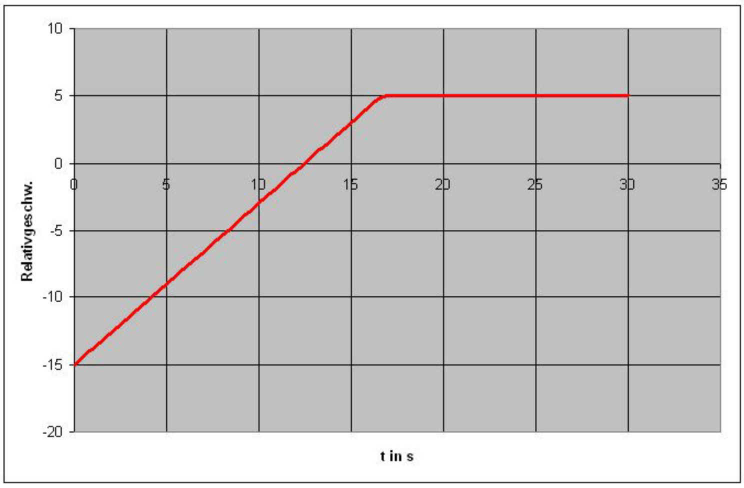
$$v = a \cdot t$$

$$t = \frac{v}{a}$$

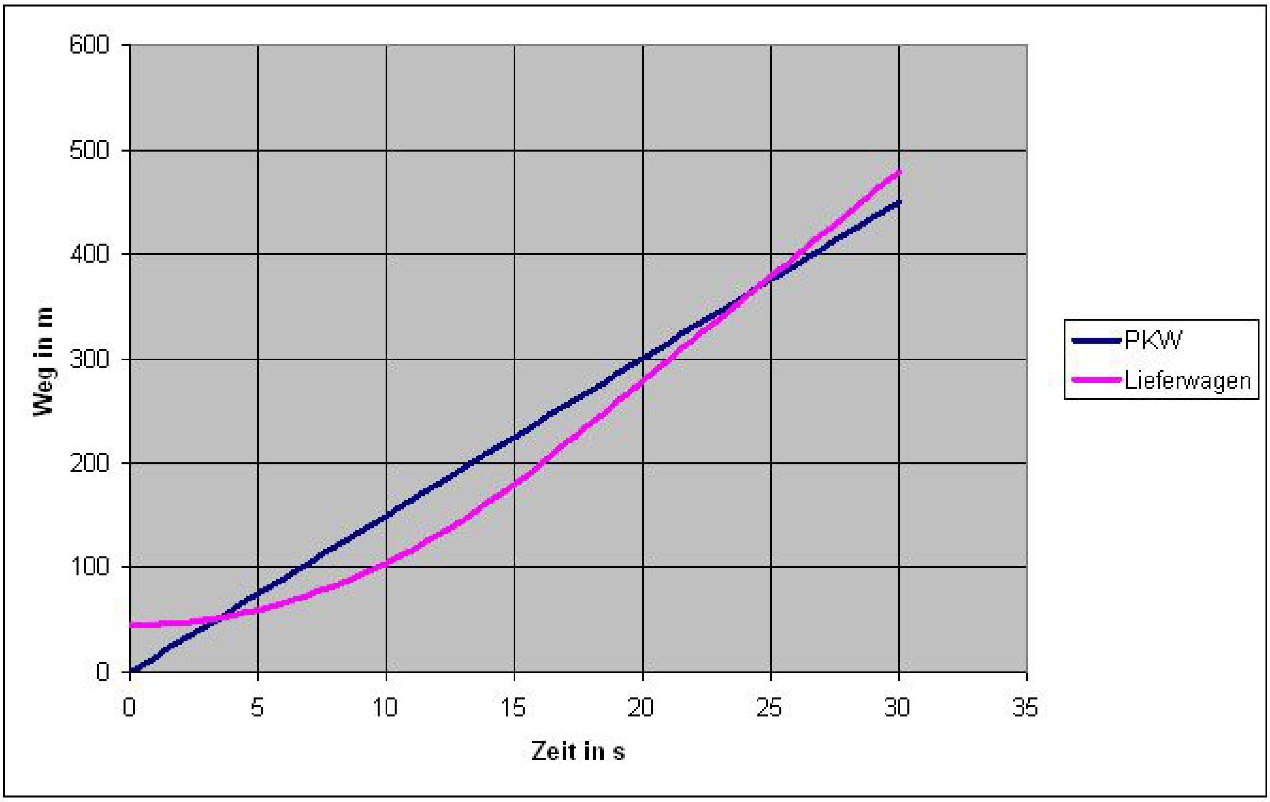
$$t = \frac{m \cdot v}{F}$$

$$t = \frac{2{,}5 \cdot 10^3\,kg \cdot 15\,\frac{m}{s}}{3{,}0 \cdot 10^3\,N}$$

$$t = 12{,}5\,s$$



c)



Als Nullpunkt für den Weg wird der Ort des PKW zum Zeitpunkt 0 gewählt. Der Lieferwagen ist zu diesem Zeitpunkt 45 m vor dem PKW.
Der PKW holt auf und überholt den Lieferwagen kurz darauf. Nach den bereits berechneten 15 s

ist der LKW schneller als der PKW und verkürzt den Abstand zwischen beiden. Kurz vor Ende der 30 s überholt der Lieferwagen den PKW.
Die Entfernungen der beiden Überholvorgänge beträgt 312,6 m.

Berechnung

Der erste Überholvorgang findet statt, wenn der PKW gleichförmig und der Lieferwagen gleichmäßig beschleunigt fahren. Das Besondere am Überholpunkt ist, dass beide den gleichen Abstand zum Nullpunkt haben. Es gilt also:

$$s_P = s_L$$

Aber nicht nur die Wege sind gleich, auch die Zeiten bis zu diesem Ereignis sind für beide Fahrzeuge gleich.

$$v_p \cdot t = \frac{a}{2} \cdot t^2 + s_0$$

$$v_p \cdot t = \frac{F}{2 \cdot m} \cdot t^2 + s_0$$

Diese Gleichung enthält noch nicht den gesuchten Weg, aber die Zeit bis zum ersten Überholvorgang. Danach wird umgestellt (quadratische Gleichung!)

$$0 = \frac{F}{2 \cdot m} \cdot t^2 - v_p \cdot t + s_0$$

$$0 = t^2 - \frac{2 \cdot m \cdot v_p}{F} \cdot t + \frac{2 \cdot m \cdot s_0}{F}$$

$$t_{1/2} = \frac{m \cdot v_p}{F} \pm \sqrt{\left(\frac{m \cdot v_p}{F}\right)^2 - \frac{2 \cdot m \cdot s_0}{F}}$$

$$t_{1/2} = \frac{2{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3 \cdot 10^3\,\mathrm{N}} \pm \sqrt{\left(\frac{2{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3 \cdot 10^3\,\mathrm{N}}\right)^2 - \frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 45\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^3\,\mathrm{N}}}$$

$$t_{1/2} = 12{,}5\,\mathrm{s} \pm \sqrt{(12{,}5\,\mathrm{s})^2 - 75}$$

$$t_{1/2} = 12{,}5\,\mathrm{s} \pm 9{,}0\,\mathrm{s}$$

$$t_1 = 3{,}5\,\mathrm{s}$$

$$t_2 = 21{,}9\,\mathrm{s}$$

Die erste Zeit von 3,5 s ist die gesuchte Zeit. Der zweite Wert besagt, dass der Lieferwagen den PKW nach dieser Zeit überholen würde, wenn er bis dahin gleichmäßig beschleunigt fährt. Er fährt aber ab 16,7 s gleichförmig, so dass diese Zeit keine Lösung der Aufgabe ist.
Mit der ermittelten Zeit lässt sich der Abstand der beiden Autos vom Nullpunkt ermitteln:

$$s = v \cdot t$$

$$s = 15\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3{,}5\,\mathrm{s}$$

$$s = 52{,}5\,\mathrm{m}$$

Für den zweiten Schnittpunkt fragt man, wie viel Zeit vergangen ist, seit der Lieferwagen von der beschleunigten zur gleichförmigen Bewegung übergegangen ist.
Für den Überholvorgang gilt wieder, dass sowohl Wege als auch Zeiten übereinstimmen:

$$s_P = s_L$$

Der Weg des PKW ist wieder

$$v_P \cdot t$$

Woraus setzt sich der Weg des Lieferwagens zusammen?
1. die 45 m Vorsprung

2. Der Weg, der in der Beschleunigungsphase zurückgelegt wird, das sind 167,3 m
3. Der Weg, den der Lieferwagen gleichförmig fährt.
Dieser Weg berechnet sich aus der Geschwindigkeit des Lieferwagens und die Zeit, die er sich in dieser Bewegungsform bewegt. Wie groß ist diese Zeit? Es ist die Zeit bis zum Überholvorgang minus der Zeit für die Beschleunigung.
Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$v_P \cdot t = 45\,m + 167{,}3\,m + v_L\left(t - t_{Lb}\right)$$

$$v_P \cdot t = 212{,}3\,m + v_L \cdot t - v_L \cdot t_{Lb}$$

$$v_P \cdot t - v_L \cdot t = 212{,}3\,m - v_L \cdot t_{Lb}$$

$$t \cdot \left(v_P - v_L\right) = 212{,}3\,m - v_L \cdot t_{Lb}$$

$$t = \frac{212{,}3\,m - v_L \cdot t_{Lb}}{v_P - v_L}$$

$$t = 24{,}3\,s$$

Nach dieser Zeit findet der zweite Überholvorgang statt. Der PKW hat dabei 365,1 m zurückgelegt.
Damit ergibt sich ein Abstand der beiden Überholvorgänge von 312,6 m.