Aufgaben zum freien Fall

8. Aus welcher Höhe müssen Fallschirmspringer zu Übungszwecken frei herab springen, um mit derselben Geschwindigkeit (7 ms^{-1}) anzukommen wie beim Absprung mit Fallschirm aus großer Höhe?

10. Von der Spitze eines Turmes lässt man einen Stein fallen. Nach 4 Sekunden sieht man ihn auf dem Boden aufschlagen.
a) Wie hoch ist der Turm?
b) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Stein auf den Erdboden auf?
c) Nach welcher Zeit hat der Stein die Hälfte seines Fallweges zurückgelegt?
d) Welche Zeit braucht der Stein zum Durchfallen der letzten 20 m?
e) Nach welcher Zeit (vom Loslassen aus gerechnet) hört man den Stein aufschlagen? Die Schallgeschwindigkeit sei 320 ms^{-1}.

16. Zum Feststellen der Tiefe eines Brunnens wird etwas Wasser hinein geschüttet. Nach 3 s hört man das Wasser unten auftreffen.
a) Wie tief ist der Brunnen, wenn die Schallgeschwindigkeit 330 m/s beträgt?
b) Beurteilen Sie, ob es eventuell ausreicht, die Zeit, die der Schall nach oben benötigt, zu vernachlässigen.

Aufgaben zum freien Fall

8. Aus welcher Höhe müssen Fallschirmspringer zu Übungszwecken frei herab springen, um mit derselben Geschwindigkeit (7 ms^{-1}) anzukommen wie beim Absprung mit Fallschirm aus großer Höhe?

10. Von der Spitze eines Turmes lässt man einen Stein fallen. Nach 4 Sekunden sieht man ihn auf dem Boden aufschlagen.
a) Wie hoch ist der Turm?
b) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Stein auf den Erdboden auf?
c) Nach welcher Zeit hat der Stein die Hälfte seines Fallweges zurückgelegt?
d) Welche Zeit braucht der Stein zum Durchfallen der letzten 20 m?
e) Nach welcher Zeit (vom Loslassen aus gerechnet) hört man den Stein aufschlagen? Die Schallgeschwindigkeit sei 320 ms^{-1}.

16. Zum Feststellen der Tiefe eines Brunnens wird etwas Wasser hinein geschüttet. Nach 3 s hört man das Wasser unten auftreffen.
a) Wie tief ist der Brunnen, wenn die Schallgeschwindigkeit 330 m/s beträgt?
b) Beurteilen Sie, ob es eventuell ausreicht, die Zeit, die der Schall nach oben benötigt, zu vernachlässigen.

Lösungen

8.

geg.:	$v = 7\,\frac{m}{s}$	ges.:	s
Lösung:	Es muss die Höhe berechnet werden, aus der ein Körper fallen muss, damit er mit 7 m/s auf dem Boden aufkommt. Es gilt das Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung: $s=\frac{g}{2}\cdot t^2$ Leider ist in dieser Gleichung die Geschwindigkeit nicht enthalten. Dafür aber die Fallzeit. Das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz hilft weiter: $v=g\cdot t$ Das wird nach t umgestellt $t=\frac{v}{g}$ und eingesetzt: $s=\frac{g}{2}\cdot\frac{v^2}{g^2}$ $s=\frac{v^2}{2\cdot g}$ $s=\frac{7^2\,\frac{m^2}{s^2}}{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}$ $s=2{,}5\,m$		
Antwort:	Die Fallschirmspringer müssen aus einer Höhe von 2,5 m springen, um mit 7 m/s auf dem Boden aufzukommen.		

10.

geg.:		ges.:	
	$t = 4\,s$ $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$		a) s b) v c) $t_{\frac{1}{2}}$

Lösung:

a)

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$s = \frac{9{,}81\,m/s^2}{2} \cdot 4^2 s^2$$

$$\underline{s = 78{,}5\,m}$$

b)

$$v = g \cdot t$$

$$v = 9{,}81\,m/s^2 \cdot 4\,s$$

$$v = 39{,}2\,m/s$$

$$\underline{v = 141{,}3\,km/h}$$

c) Der halbe Fallweg = 39,3 m

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 39{,}3\,m}{9{,}81\,m/s^2}}$$

$$\underline{t_{\frac{1}{2}} = 2{,}83\,s}$$

d) Zeit für die ersten 58 m

$$t_{58} = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$t_{58} = \sqrt{\frac{2 \cdot 58\,m}{9{,}81\,m/s^2}}$$

$$t_{58} = 3{,}44\,s$$

diese Zeit wird von der Gesamtzeit abgezogen:

$$t_{20} = t - t_{58}$$

$$t_{20} = 4\,s - 3{,}44\,s$$

$$\underline{t_{20} = 0{,}56\,s}$$

e) zur Fallzeit kommt die Zeit dazu, die der Schall benötigt, um wieder nach oben zu kommen.

$$t_g = t + \frac{s}{v_s}$$

$$t_g = 4\,s + \frac{78{,}5\,m}{320\,m/s}$$

$$\underline{t_g = 4{,}25\,s}$$

Antwort: Der Turm ist 78,5 m hoch. Der Stein trifft mit einer Geschwindigkeit von 141,3 km/h auf dem Erdboden auf. Der Stein hat nach 2,4 s die Hälfte der Fallstrecke zurück gelegt. Für die letzten 20 m benötigt der Stein 0,56 s. Man hört den Stein nach 4,25 s aufschlagen.

16.

geg.:	$v_s = 330\,\frac{m}{s}$ $t = 3\,s$	ges.:	s
Lösung:	In der gemessenen Zeit fällt der Stein im freien Fall nach unten und der Schall kommt in einer gleichförmigen Bewegung nach unten. Damit ist die Gesamtzeit: $t_{ges} = t_1 + t_2$ Die Wege für beide Bewegungen sind jeweils gleich und die gesuchte Brunnentiefe: $s = s_1 = s_2$ Die einzelnen Wege berechnen sich nach den entsprechenden Weg-Zeit-Gesetzen: Für den freien Fall: $s_1 = \frac{g}{2} \cdot t_1^2$ und für den Schall nach oben: $s_2 = v_s \cdot t_2$ Da beide Weg gleich sind, kann man beide Gleichungen gleich setzen: $\frac{g}{2} \cdot t_1^2 = v_s \cdot t_2$ Diese Gleichung ist so nicht lösbar, da sie zwei Unbekannte Zeiten hat. Man kann aber eine Zeit ersetzen: $t_2 = t_{ges} - t_1$ Damit wird: $\frac{g}{2} \cdot t_1^2 = v_s \cdot \left(t_{ges} - t_1\right)$ $\frac{g}{2} \cdot t_1^2 = v_s \cdot t_{ges} - v_s \cdot t_1$ Als einzige Unbekannte taucht nun nur noch die Zeit des freien Falls auf. Über die Lösung einer quadratischen Gleichung kann diese Zeit bestimmt werden: $\frac{g}{2} \cdot t_1^2 = v_s \cdot t_{ges} - v_s \cdot t_1$ $0 = -\frac{g}{2} \cdot t_1^2 + v_s \cdot t_{ges} - v_s \cdot t_1$ $0 = t_1^2 + \frac{2 \cdot v_s}{g} \cdot t_1 - \frac{2 \cdot v_s \cdot t_{ges}}{g}$		

Diese Normalform einer quadratischen Gleichung wird nun nach der bekannten Lösungsvorschrift gelöst:

$$t_1 = -\frac{v_s}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_s}{g}\right)^2 + \frac{2 \cdot v_s \cdot t_{ges}}{g}}$$

$$t_1 = -\frac{330\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} \pm \sqrt{\frac{330^2\,\frac{m^2}{s^2}}{9{,}81^2\,\frac{m^2}{s^4}} + \frac{2 \cdot 330\,\frac{m}{s} \cdot 3\,s}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}$$

$$t_1 = -33{,}639\,s \pm \sqrt{1131{,}59\,s^2 + 201{,}835\,s^2}$$

$$t_1 = -33{,}639\,s \pm 36{,}516\,s$$

$$t_{11} = 2{,}877\,s$$

$$t_{12} = -70{,}155\,s$$

Der zweite, negative Wert ist sinnlos und wird weggelassen. Der Stein fällt also 2,877 s nach unten. Damit bleiben für den Weg nach oben noch 0,123 s übrig. Wenn alles richtig ist, müssen die beiden damit berechneten Wege gleich sein:

$$s_1 = \frac{g}{2} \cdot t_1^2$$

$$s_1 = \frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot 2{,}877^2\,s^2$$

$$s_1 = 40{,}6\,m$$

$$s_2 = v_s \cdot t_2$$

$$s\,s_2 = 330\,\tfrac{m}{s} \cdot 0{,}123\,s$$

$$s_2 = 40{,}6\,m$$

b) Vernachlässigt man den Schallweg, reicht es aus, das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls anzuwenden:

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$s = \frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot 3^2\,s^2$$

$$s = 44{,}1\,m$$

Wenn man bei der Zeitmessung einen persönlichen Fehler von 0,3 s ansetzt, ist der große Rechenaufwand über die quadratische Gleichung sicher nicht notwendig. Die Zeit, die der Schall nach oben benötigt, liegt noch innerhalb dieses Fehlerbereiches.

Antwort:	Der Brunnen ist 40,6 m tief.