Aufgaben zur Rotation

1. Die Spitze des Minutenzeigers einer Turmuhr hat die Geschwindigkeit 1,5 mms^{-1}. Wie lang ist der Zeiger?

2. Eine Ultrazentrifuge erreicht 23 940 Umdrehungen pro Minute bei einem Radius von 10 cm. Welchen Weg legt ein Teilchen in einer Millisekunde zurück?

3. Eine Festplatte macht 7200 Umdrehungen pro Minute. Der äußere Rand hat einen Abstand von 4,5 cm von der Mitte. Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit eines Punktes in diesem Abstand? (in km/h)

4. Eine Zentrifuge erzielt die 100-fache Erdbeschleunigung. Dabei dreht sie sich in einer Kreisbahn mit 5 m Radius. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein Punkt am Rande der Kreisbahn?

5. Eine Schaukel schwingt aus horizontaler Anfangslage als Pendel nach unten. Welche Kraft haben die masselos gedachten Streben der Gondel am tiefsten Punkt auszuhalten, wenn die Masse der Gondel 60 kg und die der darin sitzenden Person 70 kg beträgt?

6. Ein Käfer (m=1g) rotiert windgeschützt auf der Flügelspitze (r=15m) einer Windkraftanlage, die für eine Umdrehung 2 s braucht. Mit welcher Kraft muss sich der Käfer mit seinen kleinen Käferbeinen an dem Flügel festhalten, damit er darauf sitzen bleibt?

7. Für viele Leute macht eine Achterbahn erst richtig Spaß, wenn mindestens ein Looping enthalten ist. Im Looping fährt der Waagen so schnell, dass er an die Bahn gepresst wird und nicht herunterfällt. Auch die Personen im Wagen spüren diesen Andruck. Nun fahren in einer Achterbahn Menschen ganz unterschiedlicher Masse: dünne, leichte und dicke, schwere.
Wie spüren sie die Kraft, die sie am oberen Punkt des Looping im Wagen hält?
a) Die schweren Menschen spüren eine stärkere Kraft.
b) Alle Menschen spüren die gleiche Kraft.
c) Die leichten Menschen spüren eine schwächere Kraft.

Lösungen

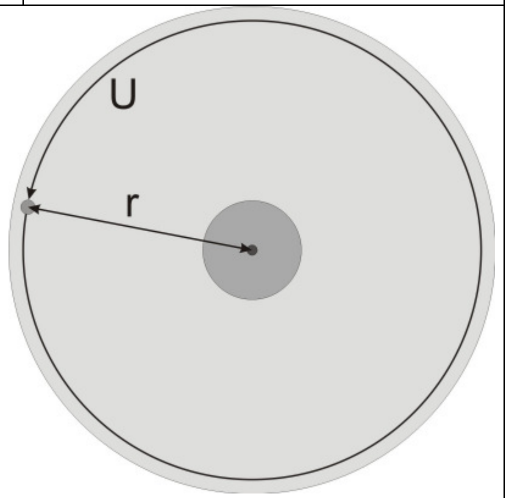
1.

geg.:	$v = 1{,}5\,mm\,s^{-1}$ $t = 60\,min$	ges.:	r
Lösung:	Die Zeit ergibt sich aus der Dauer einer Umdrehung des Minutenzeigers: er braucht genau 1 Stunde = 60 min für eine volle Umdrehung. Für die gleichförmige Drehbewegung gilt: $v = \frac{s}{t}$ $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$ $r = \frac{v \cdot T}{2 \cdot \pi}$ $r = \frac{1{,}5\,mm\,s^{-1} \cdot 3600\,s}{2 \cdot \pi}$ $r = 859\,mm$ $r = 86\,cm$		
Antwort:	Der Zeiger ist 86 cm lang.		

2.

geg.:	$U = 23940\,\text{min}^{-1}$ $r = 10\,\text{cm}$ $t = 1\,\text{ms}$	ges.:	s
Lösung:	Da die Bewegung gleichförmig ist, kann man schreiben: $v = \frac{s}{t}$ $s = v \cdot t$ s ist der gesuchte Weg und t die vorgegebene Millisekunde. Die Geschwindigkeit lässt sich aus den gegebenen Größen berechnen. Der Weg des Teilchens ist ein Kreis, so dass man dafür den Kreisumfang verwenden kann: $s = u = 2 \cdot \pi \cdot r$ $s = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^{-1}\,\text{m}$ $s = 0{,}63\,\text{m}$ Diesen Weg schafft das Teilchen in einer Minute 23 940 mal, also in einer Sekunde 399 mal. Das heißt, die Zeit für einen Umlauf beträgt $t = \frac{1}{399}\,\text{s}$ Aus dem Weg und der zeit kann die Geschwindigkeit bestimmt werden: $v = \frac{s}{t}$ $v = \frac{0{,}63\,\text{m}}{\frac{1}{399}\,\text{s}}$ $v = 0{,}63\,\text{m} \cdot 399\,\text{s}^{-1}$ $v = 251{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ Das Teilchen legt also 251,4m in einer Sekunde zurück. Gefragt ist der Weg in einer Millisekunde, also dem tausendstel Teil einer Sekunde. Das sind dann 0,2514 m, also rund 25 cm.		
Antwort:	Das Teilchen legt in einer Millisekunde rund 25 cm zurück.		

3.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$n = 7200\,min^{-1}$
$r = 4{,}5\,cm$</td><td>ges.:</td><td>v</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="3">Die Bewegung des Punktes verläuft gleichförmig, das heißt, er wird weder schneller noch langsamer. Damit kann die Gleichung für die gleichförmige Bewegung verwendet werden:
$v = \frac{s}{t}$
Der Weg entspricht dem Umfang eines Kreises mit dem gegebenen Radius:
$s = U$
$s = 2 \cdot \pi \cdot r$
Der Punkt macht 7200 Umdrehungen in einer Minute. das sind in einer Sekunde:
$\frac{7200}{60} = 120\,\text{Umdrehungen}$

</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Damit braucht der Punkt $\frac{1}{120}\,s$ für einen Umlauf.
Eingesetzt ergibt das
$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{t}$
$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2}\,m}{\frac{1}{120}\,s}$
$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 120\,m}{s}$
$v = 33{,}9\,\frac{m}{s}$
$v = 122{,}1\,\frac{km}{h}$</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">Der Punkt hat eine Bahngeschwindigkeit von 122 km/h.</td></tr>
</table>

4.

geg.:	$a = 100\,g$ $r = 5\,m$	ges.:	v
Lösung:	Da der Punkt am Rand in einem konstanten Abstand kreist ist die auf ihn wirkende Kraft gleich der Radialkraft: $F = \frac{m \cdot v^2}{r}$ $m \cdot a = \frac{m \cdot v^2}{r}$ $a = \frac{v^2}{r}$ $v = \sqrt{a \cdot r}$ $v = \sqrt{100 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 5\,m}$ $v = 70 \frac{m}{s}$ $v = 252 \frac{km}{h}$		
Antwort:	Der Punkt bewegt sich mit 252 km/h.		

5.

geg.:	$m_G = 60\,kg$ $m_P = 70\,kg$	ges.:	F
Lösung:	Die Streben müssen im untersten Punkt zwei Kräfte aufbringen: die Gewichtskraft und die Radialkraft. $F = F_G + F_R$ Die Gewichtskraft ist: $F_G = m \cdot g$ Die Radialkraft: $F_R = \frac{m \cdot v^2}{r}$ r ist der Radius der Kreisbewegung und entspricht der Länge der Schaukel. Die ist aber nicht gegeben. v ist die Geschwindigkeit, die die Schaukel im untersten Punkt hat. Da sie aus der horizontalen Lage kommt, in der sie in Ruhe war, entspricht die Geschwindigkeit der Fallgeschwindigkeit aus dieser Höhe. Die Höhe ist aber der Radius. $v = g \cdot t$ und $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ $t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}}$ Damit wird: $v = g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}}$ $v = \sqrt{2 \cdot s \cdot g}$ $v = \sqrt{2 \cdot r \cdot g}$ Damit geht man in die Gleichung der Radialkraft: $F_R = \frac{m \cdot 2 \cdot r \cdot g}{r}$ $F_R = 2 \cdot m \cdot g$ Die Länge der Schaukel ist nicht notwendig. Nun lässt sich die Gesamtkraft berechnen: $F = m \cdot g + 2 \cdot m \cdot g$ $F = 3 \cdot m \cdot g$ $F = 3 \cdot 130\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ $F = 3826\,N$ $F = 3{,}8\,kN$		
Antwort:	Die Streben müssen einer Belastung von 3,8 kN widerstehen können. Das ist das dreifache der Gewichtskraft der Person.		

6.

geg.:	$m = 1 \cdot 10^{-3}\,kg$ $r = 15\,m$ $T = 2\,s$	ges.:	F

Lösung:	Damit der Käfer die Kreisbewegung mitmachen kann, muss er sich mit der dazu notwendigen Radialkraft an der Flügelspitze festkrallen. $F = \frac{m \cdot v^2}{r}$ Über die Geschwindigkeit ist noch nichts bekannt. Die Bewegung ist aber gleichförmig und Weg und Zeit sind bekannt. Der in 2 s zurückgelegte Weg ist der Umfang des gesamten Windrades: $v = \frac{s}{t}$ $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$ Damit erhält man die Radialkraft: $F = \frac{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{r \cdot T}$ $F = \frac{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T}$ $F = \frac{1 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 15\,m}{2^2\,s^2}$ $F = 0{,}15\,N$ Damit muss der Käfer eine Kraft aufbringen, die dem 15-fachen seines Körpergewichtes entspricht.
Antwort:	Der Käfer muss sich mit 0,15 N festhalten.

7. Im oberen Punkt des Looping wirken zwei Kräfte auf den Menschen: die immer und all gegenwärtige Gewichtskraft, die ihn nach unten ziehen würde und die Zentrifugalkraft. Letztere ist eine Trägheits- oder Scheinkraft, die so groß wie die Radialkraft ist und nach außen wirkt. Damit zeigt die Richtung der Zentrifugalkraft im oberen Punkt der Loopingbahn entgegengesetzt zur Gewichtskraft.
Die Kraft, die der Mensch in diesem Punkt spürt, ist die Differenz der beiden Kräfte. Ist die Gewichtskraft größer, fällt er aus der Gondel, sind beide gleich groß, schwebt er gerade so durch den Looping (schwerelos) und ist die Zentrifugalkraft größer, kommt er ganz sicher durch den Looping hindurch.

Wovon sind die beiden Kräfte nun abhängig?
Die Gewichtskraft ist ganz einfach Masse mal Fallbeschleunigung:

$$F_G = m \cdot g$$

Die Zentrifugalkraft berechnet sich wie die Radialkraft und hängt von der Masse des Körpers, der Geschwindigkeit und dem Radius der Kreisbahn ab:

$$F_R = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Subtrahiert man beide Kräfte, erhält man

$$F = F_G - F_R$$

$$F = m \cdot g - \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$F = m \cdot \left(g - \frac{v^2}{r} \right)$$

Die Werte in der Klammer sind für einen Waagen immer gleich. Einzig die Masse ist für die Menschen variabel. Ja größer die Masse, umso größer die nach außen wirkende Kraft.

Hinweis: Damit die Loopingbahn überhaupt durchlaufen werden kann, müssen Gewichtskraft und Fliehkraft genau gleich sein. In diesem Fall kürzen sich die Massen raus. Es kommen also sowohl die Dicken als auch die Dünnen durch den Looping.