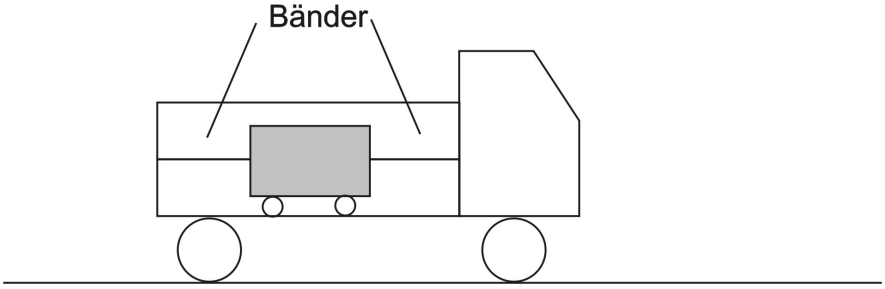
Aufgaben zur beschl. Bewegung

636. (Abi 2007)
Ein Lieferwagen der Masse 2,5 t wird aus dem Stillstand durch eine konstante Kraft mit dem Betrag 3,0 kN beschleunigt. Nachdem die Geschwindigkeit $72\frac{km}{h}$ erreicht ist, fährt der Lieferwagen gleichförmig weiter. Zum Zeitpunkt des Losfahrens befindet sich 45 m hinter dem Lieferwagen ein PKW, der sich mit der konstanten Geschwindigkeit $54\frac{km}{h}$ in die gleiche Richtung bewegt.
a) Berechnen Sie den Weg, den der Lieferwagen in den ersten 30 Sekunden nach dem Losfahren zurücklegt.
b) Die Bewegung des Lieferwagens wird in den ersten 30 Sekunden nach dem Losfahren vom Fahrer des PKW beobachtet.
Zeichen Sie das v(t) – Diagramm für die Bewegung des Lieferwagens bezogen auf ein System, in dem der PKW ruht.
c) Während der Fahrt befinden sich Lieferwagen und PKW genau zweimal nebeneinander. Bestimmen Sie die Entfernung dieser Orte voneinander.
d) Auf der Ladefläche des Lieferwagens steht ein für die Be- und Entladung benötigter kleiner Transportwagen. Dieser ist mit zwei gespannten Sicherungsbändern befestigt. Die Bänder üben im Stillstand Kräfte auf die vordere und hintere Bordwand aus.



Beschreiben Sie, wie sich diese Kräfte infolge des Losfahrens verändern.
Erklären Sie die Veränderung der Kraft auf die vordere Bordwand.

517. Ein Zug fährt mit 72 km/h Geschwindigkeit. Durch eine Baustelle wird er gezwungen, seine Geschwindigkeit auf 18 km/h zu drosseln und kommt deshalb mit 3 min Verspätung am Zielbahnhof an. Die Bremsbeschleunigung ist 0,2 m/s² und die Anfahrbeschleunigung 0,1 m/s².
Wie lang ist die Baustelle? (Aus Sicherheitsgründen hat der Zug am Anfang der Baustelle bereits die kleine Geschwindigkeit und darf erst am Ende wieder beschleunigen)

507. (Abi-Leistungskurs 2004) Während eines Autorennens beträgt die Geschwindigkeit eines Wagens 240 km/h. Infolge einer verhängten Strafe verringert der Fahrer mit der konstanten Beschleunigung –30 m/s² die Geschwindigkeit auf 80 km/h und fährt mit genau dieser Geschwindigkeit 300 m. Danach beschleunigt er gleichmäßig und erreicht nach 4,0 s seine ursprüngliche Geschwindigkeit.
Ermitteln Sie den Zeitverlust, den diese Strafe mindestens bedeutet, wenn angenommen wird, dass sich das Fahrzeug ohne Strafe mit der konstanten Geschwindigkeit 240 km/h gleichförmig bewegt hätte.

Lösungen

636. a)

geg.:	$m = 2{,}5 \cdot 10^3\,\text{kg}$ $F = 3{,}0\,\text{kN}$ $v_0 = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $v_L = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $v_P = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $s_0 = 45\,\text{m}$ $t = 30\,\text{s}$	ges.:	$s_{L(30s)}$
Lösung:	Es liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor. Wie lange dauert es, bis der Lieferwagen seine Endgeschwindigkeit erreicht hat? $v = a \cdot t$ $t = \frac{v}{a}$ Die Beschleunigung lässt sich aus Kraft und Masse nach dem Newtonschen Grundgesetz berechnen: $F = m \cdot a$ $a = \frac{F}{m}$ Und eingesetzt: $t = \frac{v \cdot m}{F}$ $t = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2{,}5 \cdot 10^3\,\text{kg}}{3 \cdot 10^3\,\text{N}}$ $t = 16{,}7\,\text{s}$ Damit fährt er die ersten 16,7 s beschleunigt und die restlichen 13,3s gleichförmig. Der Weg setzt sich demnach aus dem Weg der beschleunigten Bewegung und dem Weg der gleichförmigen Bewegung zusammen: $s_{L(30)} = s_{Lb} + s_{Lg}$ $s_{L(30)} = \frac{a}{2} \cdot t_{Lb}^2 + v_1 \cdot t_{Lg}$ $s_{L(30)} = \frac{F}{2 \cdot m} \cdot t_{Lb}^2 + v_1 \cdot t_{Lg}$ $s_{L(30)} = \frac{3{,}0 \cdot 10^3\,\text{N}}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3\,\text{kg}} \cdot (16{,}7\,\text{s})^2 + 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 13{,}3\,\text{s}$ $s_{L(30)} = 167{,}3\,\text{m} + 266\,\text{m}$ $s_{L(30)} = 433{,}3\,\text{m}$		
Antwort:	Während der ersten 30 s legt der Lieferwagen einen Weg von 433,3 m zurück.		

b) Was sieht der Fahrer des PKW? Zu Beginn, also zum Zeitpunkt 0, beträgt die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Fahrzeugen $45\frac{km}{h}$. Da der Lieferwagen immer schneller wird, verkleinert sich die Geschwindigkeit zwischen den Fahrzeugen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt fahren der PKW und der Lieferwagen gleich schnell. Zu diesem Zeitpunkt ist die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Fahrzeugen 0 und wird danach vom Betrag her wieder größer. Unter Berücksichtigung der Richtung wird sie positiv. Wenn der Lieferwagen nicht mehr beschleunigt, also nach den 16,7 s, fahren beide mit einer konstanten Geschwindigkeit. Das bedeutet, dass die Differenz beider Werte ebenfalls konstant bleibt.

Nach welcher Zeit haben beide die gleiche Geschwindigkeit? Dazu muss berechnet werden, nach welcher Zeit der Lieferwagen mit der Geschwindigkeit des PKW fährt.

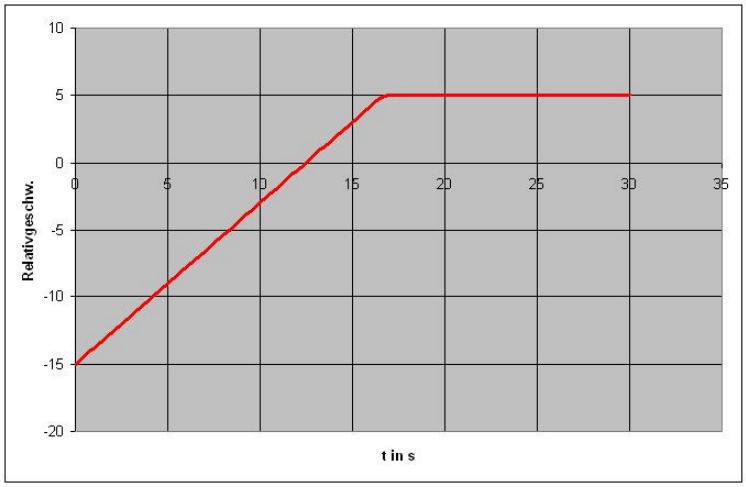
$$v = a \cdot t$$

$$t = \frac{v}{a}$$

$$t = \frac{m \cdot v}{F}$$

$$t = \frac{2{,}5 \cdot 10^3\,kg \cdot 15\,\frac{m}{s}}{3{,}0 \cdot 10^3\,N}$$

$$t = 12{,}5\,s$$



c) Der erste Überholvorgang findet statt, wenn der PKW gleichförmig und der Lieferwagen gleichmäßig beschleunigt fahren. Das Besondere am Überholpunkt ist, dass beide den gleichen Abstand zum Nullpunkt haben. Es gilt also:

$$s_P = s_L$$

Aber nicht nur die Wege sind gleich, auch die Zeiten bis zu diesem Ereignis sind für beide Fahrzeuge gleich.

$$v_p \cdot t = \frac{a}{2} \cdot t^2 + s_0$$

$$v_p \cdot t = \frac{F}{2 \cdot m} \cdot t^2 + s_0$$

Diese Gleichung enthält noch nicht den gesuchten Weg, aber die Zeit bis zum ersten Überholvorgang. Danach wird umgestellt (quadratische Gleichung!)

$$0 = \frac{F}{2 \cdot m} \cdot t^2 - v_p \cdot t + s_0$$

$$0 = t^2 - \frac{2 \cdot m \cdot v_p}{F} \cdot t + \frac{2 \cdot m \cdot s_0}{F}$$

$$t_{1/2} = \frac{m \cdot v_p}{F} \pm \sqrt{\left(\frac{m \cdot v_p}{F}\right)^2 - \frac{2 \cdot m \cdot s_0}{F}}$$

$$t_{1/2} = \frac{2{,}5 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \cdot 10^3\,\text{N}} \pm \sqrt{\left(\frac{2{,}5 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \cdot 10^3\,\text{N}}\right)^2 - \frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 45\,\text{m}}{3 \cdot 10^3\,\text{N}}}$$

$$t_{1/2} = 12{,}5\,\text{s} \pm \sqrt{(12{,}5\,\text{s})^2 - 75}$$

$$t_{1/2} = 12{,}5\,\text{s} \pm 9{,}0\,\text{s}$$

$$t_1 = 3{,}5\,\text{s}$$

$$t_2 = 21{,}9\,\text{s}$$

Die erste Zeit von 3,5 s ist die gesuchte Zeit. Der zweite Wert besagt, dass der Lieferwagen den PKW nach dieser Zeit überholen würde, wenn er bis dahin gleichmäßig beschleunigt fährt. Er fährt aber ab 16,7 s gleichförmig, so dass diese Zeit keine Lösung der Aufgabe ist.
Mit der ermittelten Zeit lässt sich der Abstand der beiden Autos vom Nullpunkt ermitteln:

$$s = v \cdot t$$

$$s = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3{,}5\,\text{s}$$

$$s = 52{,}5\,\text{m}$$

Für den zweiten Schnittpunkt fragt man, wie viel Zeit vergangen ist, seit der Lieferwagen von der beschleunigten zur gleichförmigen Bewegung übergegangen ist.
Für den Überholvorgang gilt wieder, dass sowohl Wege als auch Zeiten übereinstimmen:

$$s_P = s_L$$

Der Weg des PKW ist wieder

$$v_P \cdot t$$

Woraus setzt sich der Weg des Lieferwagens zusammen?
1. die 45 m Vorsprung
2. Der Weg, der in der Beschleunigungsphase zurückgelegt wird, das sind 167,3 m
3. Der Weg, den der Lieferwagen gleichförmig fährt.
Dieser Weg berechnet sich aus der Geschwindigkeit des Lieferwagens und die Zeit, die er sich in dieser Bewegungsform bewegt. Wie groß ist diese Zeit? Es ist die Zeit bis zum Überholvorgang minus der Zeit für die Beschleunigung.
Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$v_P \cdot t = 45\,\text{m} + 167{,}3\,\text{m} + v_L\,(t - t_{Lb})$$

$$v_P \cdot t = 212{,}3\,\text{m} + v_L \cdot t - v_L \cdot t_{Lb}$$

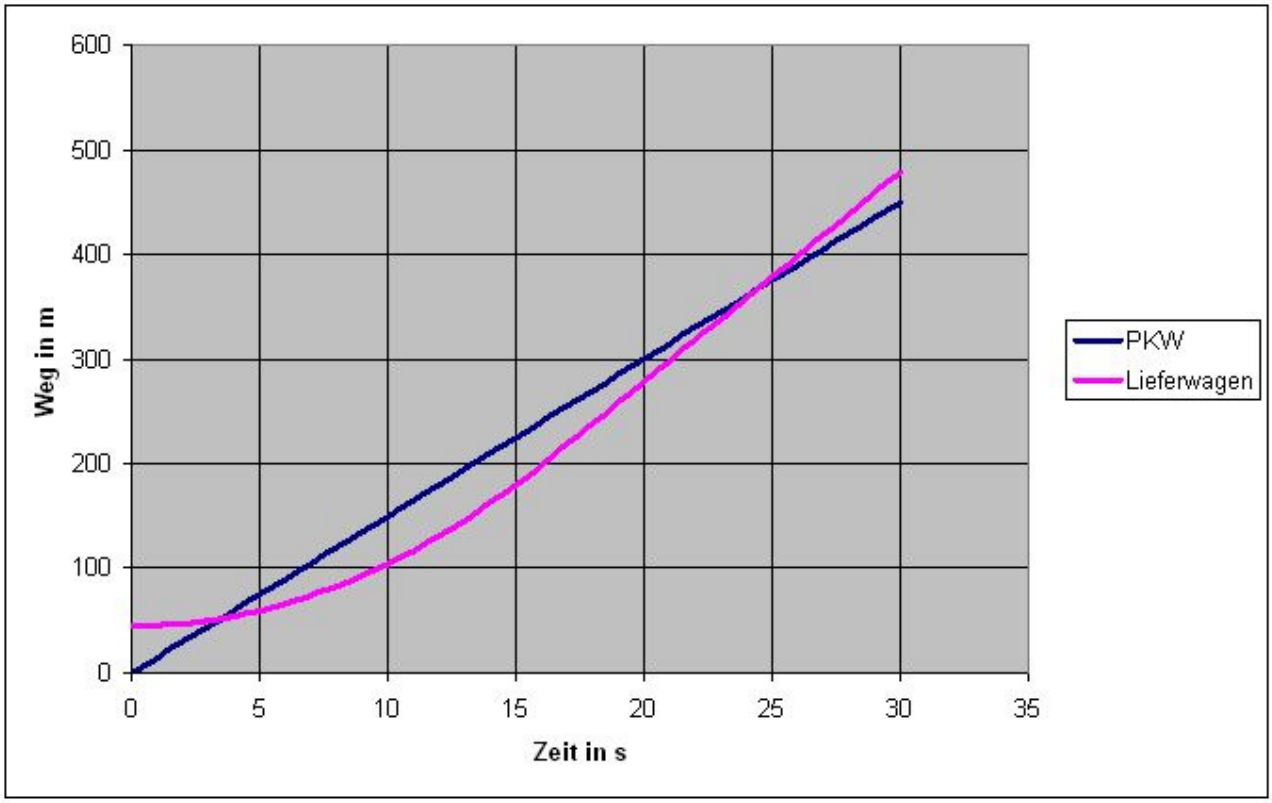
$$v_P \cdot t - v_L \cdot t = 212{,}3\,\text{m} - v_L \cdot t_{Lb}$$

$$t \cdot (v_P - v_L) = 212{,}3\,\text{m} - v_L \cdot t_{Lb}$$

$$t = \frac{212{,}3\,\text{m} - v_L \cdot t_{Lb}}{v_P - v_L}$$

$$t = 24{,}3\,\text{s}$$

Nach dieser Zeit findet der zweite Überholvorgang statt. Der PKW hat dabei 365,1 m zurückgelegt.
Damit ergibt sich ein Abstand der beiden Überholvorgänge von 312,6 m.



d) Die Kraft auf die vordere Bordwand wird größer und die auf die hintere Bordwand kleiner.
Erklärung für die vordere Bordwand: Beim Anfahren wirkt auf den Lieferwagen ein konstante Kraft. Diese Kraft muss auch auf den kleinen Transportwagen übertragen werden.
Würde auf ihn keine Kraft wirken, bleibt er im Zustand der Ruhe (Trägheitsgesetz) und fährt auf dem Lieferwagen in Richtung der hinteren Bordwand.
Die Bänder übertragen die Kraft vom Lieferwagen auf den Transportwagen. Dieser muss in Fahrtrichtung beschleunigt werden, es muss also eine Kraft in diese Richtung wirken. Diese Kraft wird von dem Band aufgebracht, das an der vorderen Bordwand befestigt ist. Diese bringt die notwendige Gegenkraft auf (Wechselwirkungsgesetz)

517.

geg.:	$v_{norm} = 20\,\frac{m}{s}$ $v_{bau} = 5\,\frac{m}{s}$ $\Delta t = 180\,s$ $a_{br} = 0{,}2\,\frac{m}{s^2}$ $a_{be} = 0{,}1\,\frac{m}{s^2}$	ges.:	s_b

Lösung:

Der Baustellenbereich teilt sich in drei Strecken auf:
1. Der Weg zum Abbremsen s_1
2. Die Baustelle s_b
3. Der Weg zum Beschleunigen s_3

Wie groß ist der Weg zum Abbremsen und wie lange braucht der Zug dafür?

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a}$$

$$t_{br} = \frac{15\,\frac{m}{s}}{0{,}2\,\frac{m}{s^2}}$$

$$t_{br} = 75\,s$$

$$s = v_{norm} \cdot t_{br} - \frac{a_{br}}{2} \cdot t_{br}^2$$

$$s = 1500\,m - 562{,}5\,m$$

$$s = 937{,}5\,m$$

Der Zug muss also 937,5 m vor der Baustelle mit dem Bremsen beginnen.
Wie weit hinter der Baustelle hat er seine ursprüngliche Geschwindigkeit wieder erreicht?

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a}$$

$$t_{be} = \frac{15\,\frac{m}{s}}{0{,}1\,\frac{m}{s^2}}$$

$$t_{be} = 150\,s$$

$$s = v_{bau} \cdot t_{be} + \frac{a_{be}}{2} \cdot t_{be}^2$$

$$s = 750\,m + 1125\,m$$

$$s = 1875\,m$$

Insgesamt benötigt er also für den Brems- und Beschleunigungsvorgang 225 s und legt dabei 2812,5 m zurück.
Wie lange hätte er für diese Strecken gebraucht, wenn er nicht gebremst hätte?

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{2812{,}5\,m}{20\,\frac{m}{s}}$$

$$t = 140{,}6\,s$$

Er hätte für diese Strecke 140,6 s benötigt.
Da er aber für diese Strecke 225 s benötigt hat, hat der durch das Bremsen und Beschleunigen 84,4 s verloren. Das Durchfahren der Baustelle kostet also von den 3 min Verspätung die restlichen 95,6 s.
Hätte der Zug die Baustelle ohne Abbremsen durchfahren können, wäre dabei die Zeit t_{norm} verstrichen. Durch das Abbremsen dauerte es aber t_{bau}. Und es gilt:

$$t_{bau} - t_{norm} = 95{,}6\,s$$

Weiterhin kann man schreiben:

$$s_b = v_{norm} \cdot t_{norm} = v_{bau} \cdot t_{bau}$$

	Damit kann man zur Bestimmung einer der beiden unbekannten Zeiten Umstellen und Einsetzen: $t_{norm} = \frac{v_{bau} \cdot t_{bau}}{v_{norm}}$ $t_{norm} = \frac{v_{bau} \cdot 95{,}6\,s + t_{norm}}{v_{norm}}$ $t_{norm} = \frac{5\,\frac{m}{s} \cdot 95{,}6\,s + t_{norm}}{20\,\frac{m}{s}}$ $t_{norm} = \frac{1}{4} \cdot 95{,}6\,s + t_{norm}$ $4 \cdot t_{norm} = 95{,}6\,s + t_{norm}$ $3 \cdot t_{norm} = 95{,}6\,s$ $t_{norm} = 31{,}9\,s$ Damit kann nun endlich die Länge der Baustelle ausgerechnet werden: $s_b = v_{norm} \cdot t_{norm}$ $s_b = 20\,\frac{m}{s} \cdot 31{,}9s$ $s_b = 637{,}5\,m$
Antwort:	Die Baustelle ist 637,5 m lang.

507.

geg.:	$v_1 = 66{,}7\,\frac{m}{s}$ $a_1 = -30\,\frac{m}{s^2}$ $v_2 = 22{,}2\,\frac{m}{s}$ $s_2 = 300\,m$ $t_3 = 4{,}0\,s$	ges.:	Δt

Lösung:

Der gesuchte Zeitverlust ist die Differenz aus der Zeit, die der Fahrer vom Bremsen bis zum Erreichen der ursprünglichen Geschwindigkeit braucht und der Zeit, die er benötigt hätte, wenn er nicht bestraft wurden wäre.

$\Delta t = t_S - t_{oS}$

Für die Zeit ohne Strafe muss man wissen, wie weit er mit Strafe gefahren ist. Diese Strecke setzt sich aus drei Teilen zusammen:

1. Das Abbremsen auf 80 km/h.
2. Die 300 m Fahren mit dieser Geschwindigkeit.
3. Das Beschleunigen auf 240 km/h.

zu 1. Es gilt:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v \cdot t$$

Zuvor muss die Zeit zum Abbremsen berechnet werden:

$$a = \frac{\Delta v}{t}$$

$$t_1 = \frac{\Delta v}{a}$$

$$t_1 = 1{,}48\,s$$

Jetzt der Weg:

$$s_1 = \frac{-30\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (1{,}48\,s)^2 + 66{,}7\,\frac{m}{s} \cdot 1{,}48\,s$$

$$s_1 = 65{,}86\,m$$

zu 3.

Zuerst muss die Beschleunigung berechnet werden:

$$a = \frac{\Delta v}{t_3}$$

$$a = 11{,}13\,s$$

Nun kann der Weg bestimmt werden:

$$s_3 = \frac{11{,}13\,\frac{m}{s}}{2} \cdot (4\,s)^2 + 22{,}2\,\frac{m}{s} \cdot 4\,s$$

$$s_3 = 177{,}8\,m$$

Damit ergibt sich ein Gesamtweg von

$$s = s_1 + s_2 + s_3$$

$$s = 543{,}66\,m$$

	Welche Zeit hätte er mit der vollen Geschwindigkeit für diesen Weg benötigt? $v = \frac{s}{t}$ $t = \frac{s}{v}$ $t_{oS} = \frac{543{,}66\,m}{66{,}7\,\frac{m}{s}}$ $t_{oS} = 8{,}15\,s$ Die wirklich benötigte Zeit ist die Summe der berechneten Teilzeiten. Es fehlt noch die zeit für die Strecke, die das Auto mit der konstanten, langsamen Geschwindigkeit fährt. $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$ $t_2 = \frac{300\,m}{22{,}2\,\frac{m}{s}}$ $t_2 = 13{,}51\,s$ Damit wird: $t_S = t_1 + t_2 + t_3$ $t_S = 1{,}48\,s + 13{,}51\,s + 4\,s$ $t_S = 18{,}99\,s$ Jetzt kann endlich der Zeitverlust berechnet werden: $\Delta t = t_S - t_{oS}$ $\Delta t = 18{,}99\,s - 8{,}15\,s$ $\Delta t = 10{,}84\,s$
Antwort:	Der Fahrer hat einen Zeitverlust von 10,8 s.