Aufgaben Längen- und Volumenausdehnung

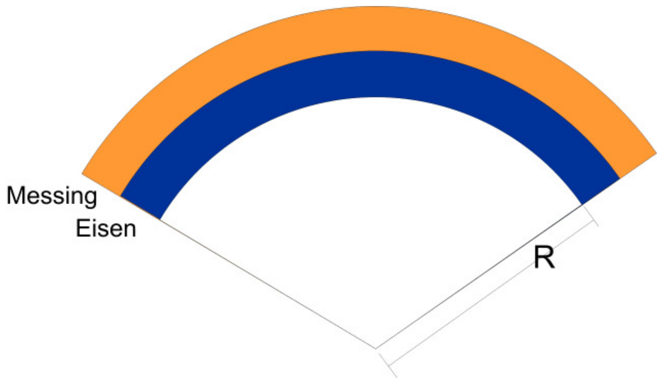
202. Mit einem Stahlmaßband, das für eine Temperatur von 20 °C geeicht ist, wird bei einer Temperatur von 5 °C die Länge der Seite eines Gartens gemessen. Welche Aussage ist richtig?
a) Die Länge wird zu klein bestimmt.
b) Die Länge wird exakt gemessen.
c) Die Länge wird zu groß bestimmt.

168. Ein Schmied will einen stählernen Reifen auf ein Rad aufziehen. Der Durchmesser des Rades beträgt 0,74 m, der innere Durchmesser des Reifens aber nur 0,735 m. Die Temperatur der Umgebung beträgt 15 °C. Auf welche Temperatur muss der Schmied den Reifen erwärmen, damit er ihn mühelos auf das Rad aufziehen kann? (Mühelos heißt, der innere Durchmesser des Reifens hat die gleiche Größe wie das Rad)

20. Ein Zinkstab hat einen Querschnitt von 1,5 cm^2. Ihm wird Wärme vom Betrag 30 kJ zugeführt.
Berechnen Sie die Längenänderung des Stabes.

200. Ein Bimetallstreifen besteht aus je einem 2 mm dicken Messing- und Eisenstreifen.
Bei 0 °C ist der Streifen gerade.
Welchen Krümmungsradius R hat dieser Bogen, wenn der Bimetallstreifen auf 400 °C erwärmt wird?

$\alpha_{Messing} = 19 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}, \alpha_{Eisen} = 12 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$



43. Das Stahlgehäuse (α_S = 12*10^{-6} K^{-1}) eines Transformators vom Leervolumen 300 l (bei 20 °C) ist mit Öl ($\gamma_Ö$ = 0,00096 K^{-1}) gefüllt. Der darin befindliche Transformator besteht in der Hauptsache aus 500 kg Eisen (ρ_E = 7,75 gcm^{-3}, α_E = 12*10^{-6} K^{-1}) und 500 kg Kupfer (ρ_K = 8,93 gcm^{-3}, α_K = 14*10^{-6} K^{-1}). Wie viel Öl fließt bei der Betriebstemperatur von 60 °C in das Ausgleichsgefäß über?

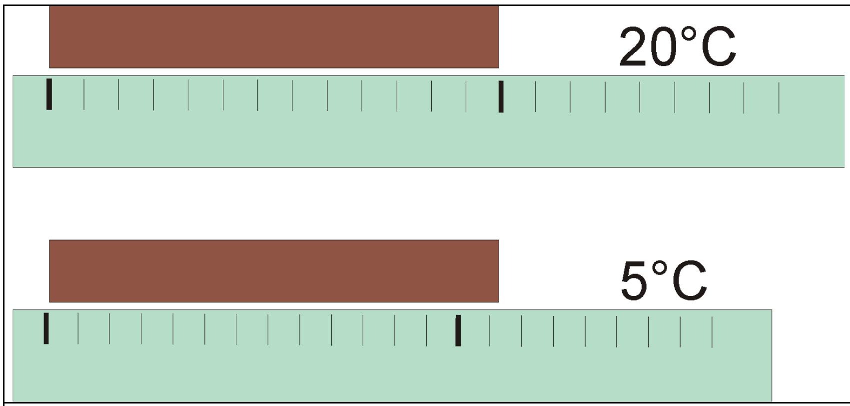
171. Bei einer Raumtemperatur von 18 °C beträgt die Dichte von Messing 8,1 g/cm^3. Welche Dichte besitzt Messing bei einer Temperatur von –35 °C? (1 cm^3 Messing vergrößert seinen Rauminhalt beim Erwärmen um 1 K um 0,000 057 cm^3).

201. Die Stoßfuge zwischen den 10 m langen und 20 cm dicken Betonplatten einer Straße ist mit Teer ausgegossen. Bei 5 °C sind die Fugen 10 mm breit. Wie viel Teer quillt je 10 cm Fugenlänge heraus, wenn sich die Platten im Sommer auf 50 °C erwärmen?
($\alpha_{Beton} = 12 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}, \gamma_{Teer} = 55 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$)

234. Wasser hat bei 20 °C eine Dichte von 0,99821 g/cm^3 und bei 100 °C eine von 0,95835 g/cm^3. Wie groß ist der mittlere Volumenausdehnungskoeffizient für diesen Temperaturbereich?

Lösungen

202.



c) Die Länge wird zu groß bestimmt.
Bei der Temperatur von 5°C zieht sich das Stahlmessband etwas zusammen, der Garten nicht! Damit werden die Abstände zwischen den Markierungen kleiner und auf die gleiche Länge des Gartens gehen mehr Markierungen.

168.

geg.:	$d_R = 0{,}74\,m$ $d_i = 0{,}735\,m$ $\vartheta_1 = 15°C$	ges.:	ϑ_2
Lösung:	Der Reifen muss so stark erwärmt werden, dass sein Durchmesser ebenfalls 0,74 m groß ist. Der Reifen kann als ein gebogener Stab betrachtet werden. Die Länge dieses Stabes ist der Umfang des Reifens. 1. Aus dem Durchmesser wird der Durchmesser des Rades und des Reifens berechnet: $u = \pi \cdot d$ $u_R = 2{,}325\,m$ $u_i = 2{,}310\,m$ Der Umfang des Rades ist um 0,015 m größer als der Umfang des Reifens. Also muss der Reifen so weit erwärmt werden, dass er 0,015 m länger wird. 2. Berechnung der Temperaturänderung: Die Länge l entspricht dem Umfang des Reifens. $\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T$ $\Delta T = \frac{\Delta l}{l \cdot \alpha}$ $\Delta T = \frac{0{,}015\,m}{2{,}310\,m \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}}$ $\Delta T = 590\,K$ Der Reifen muss also um 590 K erwärmt werden. Da seine Anfangstemperatur bereits 15°C betrug, ist die Endtemperatur 605°C groß.		
Antwort:	Der Reifen muss auf 605°C erwärmt werden.		

20.

geg.:	$A = 1{,}5\,cm^2$ $Q = 30 \cdot 10^3\,J$ $\alpha = 3{,}6 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$ $c = 391\,J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ $\rho = 7{,}13 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot cm^{-3}$	ges.:	Δl
Lösung:	Auf den ersten Blick scheint es so, als wenn die Aufgabe nicht lösbar ist. Um eine Längenänderung zu berechnen, müsste wenigstens die Länge des Stabes gegeben sein. Es zeigt sich aber, dass die Längenänderung unabhängig von der Ausgangslänge ist. Die Wärme verteilt sich auf den gesamten Stab. Ein kurzer Stab wird seine Temperatur mehr erhöhen als ein langer Stab. Da die Längenänderung aber von der Länge des Stabes und der Temperaturänderung abhängt, ist am Ende die Länge des Stabes nicht wichtig, sie kürzt sich bei der Berechnung raus. Allgemein gilt: $\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$ Weiterhin: $V = A \cdot l$ $l = \frac{V}{A}$ und: $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ $\Delta T = \frac{Q}{m \cdot c}$ Das wird eingesetzt: $\Delta l = \alpha \cdot \frac{V}{A} \cdot \frac{Q}{m \cdot c}$ Masse und Volumen sind unbekannt. Aber es ist die Dichte bekannt: $\rho = \frac{m}{V}$ $V = \frac{m}{\rho}$ Damit wird dann: $\Delta l = \alpha \cdot \frac{m \cdot Q}{\rho \cdot A \cdot m \cdot c}$ $\Delta l = \frac{\alpha \cdot Q}{\rho \cdot A \cdot c}$ Damit stehen auf der rechten Seite nur noch gegebene Größen und die Längenänderung kann berechnet werden.		
Antwort:	Die Länge des Stabes ändert sich um 0,258 cm.		

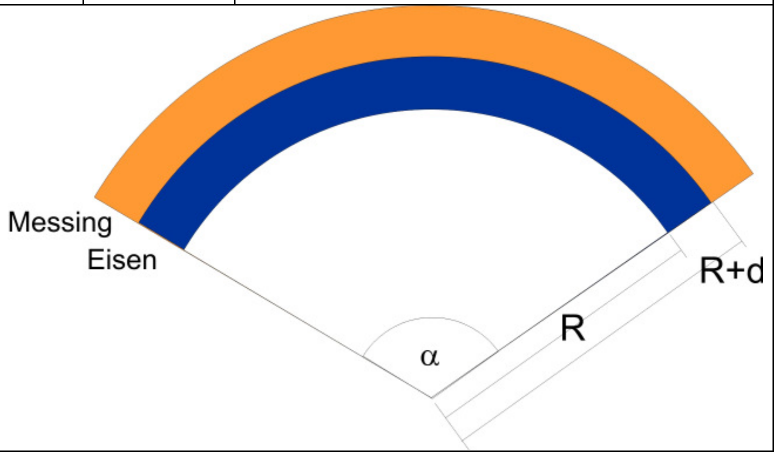
200.

geg.:	$d = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$ $\alpha_{Messing} = 19 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$ $\alpha_{Eisen} = 12 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$	ges.:	R

Lösung:

Wenn sich der Bimetallstreifen krümmt, ist der Krümmungswinkel bei beiden Metallstreifen gleich. Es werden die unteren Kanten der Streifen betrachtet. Die Radien beim gebogenen Bimetall sind dann für Eisen:

$R_{Eisen} = R$



und für Messing:

$R_{Messing} = R + d$

Der Zentriwinkel α ist der Quotient von Bogenlänge und Radius (Definition des Bogenmaßes.
Damit wird:

$$\alpha = \frac{\ell_{Eisen}}{R} = \frac{\ell_{Messing}}{R+d}$$

Die Längen der Mittelstreifen lassen sich aus der ursprünglichen Länge und der Temperaturerhöhung berechnen:

$$\ell = \ell_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$$

In die obere Gleichung eingesetzt ergibt das:

$$\frac{\ell_0 \cdot (1 + \alpha_{Eisen} \cdot \Delta\vartheta)}{\ell_0 \cdot (1 + \alpha_{Messing} \cdot \Delta\vartheta)} = \frac{R}{R+d}$$

$$\frac{(1 + \alpha_{Eisen} \cdot \Delta\vartheta)}{(1 + \alpha_{Messing} \cdot \Delta\vartheta)} = \frac{R}{R+d}$$

In dieser Gleichung steht nur noch der Krümmungsradius R als unbekannte Größe, so dass danach umgestellt werden muss:

	$\frac{(1+\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta)}{(1+\alpha_{Messing}\cdot\Delta\vartheta)}=\frac{R}{R+d}$ $(1+\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta)\cdot(R+d)=(1+\alpha_{Messing}\cdot\Delta\vartheta)\cdot R$ $R+R\cdot\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta+d+\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta\cdot d=R+R\cdot\alpha_{Messing}\cdot\Delta\vartheta$ $R+R\cdot\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta-R-R\cdot\alpha_{Messing}\cdot\Delta\vartheta=-d-\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta\cdot d$ $-R\cdot\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta+R\cdot\alpha_{Messing}\cdot\Delta\vartheta=+d+\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta\cdot d$ $R\cdot(-\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta+\alpha_{Messing}\cdot\Delta\vartheta)=d(1+\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta)$ $R=\frac{d(1+\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta)}{-\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta+\alpha_{Messing}\cdot\Delta\vartheta}$ $R=\frac{d(1+\alpha_{Eisen}\cdot\Delta\vartheta)}{\Delta\vartheta\cdot(\alpha_{Messing}-\alpha_{Eisen})}$ $R=\frac{2\cdot10^{-3}\,m\cdot(1+12\cdot10^{-6}\,K^{-1}\cdot400\,K)}{400\,K\cdot(19\cdot10^{-6}\,K^{-1}-12\cdot10^{-6}\,K^{-1})}$ $R=0{,}72\,m$
Antwort:	Der Bimetallstreifen hat einen Krümmungsradius von 0,72 m.

43.

geg.:	$\alpha_S = 12 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$ $V_S = 300\,l$ $\vartheta_1 = 20°C$ $\vartheta_2 = 60°C$ $\gamma_Ö = 9{,}6 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}$ $m_E = 500\,kg$ $\rho_E = 7{,}75\,\frac{g}{cm^{-3}}$ $\alpha_E = 12 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$ $m_K = 500\,kg$ $\rho_K = 8{,}93\,\frac{g}{cm^{-3}}$ $\alpha_K = 14 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$	ges.:	ΔV
Lösung:	Das Öl im Trafogehäuse dient der Kühlung. Es leitet keinen Strom und lässt das Eisen nicht rosten. Wird der Trafo betrieben, erwärmt sich die gesamte Anlage und dehnt sich aus. Berücksichtigt werden muss, dass jedes Material einen anderen Ausdehnungskoeffizienten hat, sich also unterschiedlich stark ausdehnt. Das Öl vergrößert bei Erwärmung sein Volumen und würde überlaufen. Zu dieser Volumenvergrößerung muss die Volumenvergrößerung des Kupfers und des Eisens addiert werden. Da das Stahlgehäuse ebenfalls größer wird, muss dessen Volumenvergrößerung wieder abgezogen werden. **1.** Wie viel Öl ist im Gehäuse? Wäre das Gehäuse leer, würden sich darin 300 l Öl befinden. Der Trafo aus Eisen und Kupfer nimmt aber ebenfalls Raum ein. Also muss dieses Volumen zuerst berechnet werden. $\rho = \frac{m}{V}$ $V_E = \frac{m_E}{\rho_E}$ $V_E = \frac{500\,kg}{7750\,\frac{kg}{m^3}}$ $V_E = 0{,}065\,m^3$ $V_E = 64{,}5\,l$ $V_K = 56\,l$		

	Damit befinden sich im Trafogehäuse 300 l – 64,5 l – 56 l = 179,5 l **2.** Um wie viel dehnt sich das Öl sowie Kupfer und Eisen aus? $\Delta V_{Ö} = V_{Ö} \cdot \Delta T \cdot \gamma_{Ö}$ $\Delta V_{Ö} = 179{,}5 l \cdot 40 K \cdot 9{,}6 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ $\Delta V_{Ö} = 6{,}9 l$ $\Delta V_{E} = 0{,}093 l$ $\Delta V_{K} = 0{,}094 l$ Der Inhalt im Trafogehäuse dehnt sich insgesamt 7,09 l aus. **3.** Um wie viel wird das Stahlgehäuse größer? Will man die Volumenvergrößerung eines Hohlkörpers berechnen, kann man annehmen, dass man es mit einem Vollkörper zu tun hat. Bei beiden ist die Volumenänderung gleich. Der Volumenausdehnungskoeffizient ist der 3 fache lineare Ausdehnungskoeffizient. $\Delta V_{S} = V_{S} \cdot \Delta T \cdot 3 \cdot \alpha_{S}$ $\Delta V_{S} = 300 l \cdot 40 K \cdot 3 \cdot 12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ $\Delta V_{S} = 0{,}43 l$ 4. Wie viel läuft nun aus? Die Ausdehnung des Stahlgehäuses muss von dem bei 2. berechneten Volumen abgezogen werden. Damit erhält man einen Überlauf von 6,66 l.
Antwort:	Bei einer Betriebstemperatur von 60°C laufen 6,66 l Öl in das Ausgleichsgefäß.

171.

geg.:	$\vartheta_1 = 18°C$ $\vartheta_2 = -35°C$ $\rho_1 = 8{,}1\frac{g}{cm^3}$ $\gamma = 5{,}7 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$	ges.:	ρ_2
Lösung:	Die neue Dichte ist die Masse, die sich bei der Abkühlung nicht ändert, durch das neue Volumen, das sich bei der Abkühlung verkleinert. $\rho = \frac{m}{V}$ $\rho_2 = \frac{m}{V + \Delta V}$ $\rho_2 = \frac{m}{V + V \cdot \gamma \cdot \Delta T}$ $\rho_2 = \frac{m}{V \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T)}$ $\rho_2 = \rho_1 \cdot \left(\frac{1}{(1 + \gamma \cdot \Delta T)}\right)$ $\rho_2 = 8{,}1\frac{g}{cm^3} \cdot \left(\frac{1}{(1 + 5{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot -53K}\right)$ $\rho_2 = 8{,}12\frac{g}{\,^3}$ cm		
Antwort:	Die neue Dichte beträgt 8,12 g/cm³.		

201.

geg.:	$\alpha_{Beton} = 12 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$ $\gamma_{Teer} = 55 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$ $\vartheta_1 = 5°C$ $\vartheta_2 = 50°C$ $b = 1cm$ $\ell = 1m$ $d = 20\,cm$ $f = 10\,cm$	ges.:	ΔV_{Teer}
Lösung:	Wenn sich die Betonplatten ausdehnen, wird der Zwischenraum zwischen den Platten kleiner. Dadurch quillt Teer heraus. Aber auch der Teer dehnt sich bei Erwärmung aus, so dass dadurch die Menge des austretenden Teers noch größer wird. 1. Um welches Volumen verkleinert sich der Zwischenraum? * Volumen bei 5℃ $V_1 = b \cdot d \cdot f$ $V_1 = 1cm \cdot 20\,cm \cdot 10\,cm$ $V_1 = 200\,cm^3$ * Volumen bei 50℃ Durch die Erwärmung dehnen sich die Platten aus. Dabei wird nur die Längenausdehnung berücksichtigt und die Höhen- und Breitenausdehnung vernachlässigt, da sie so klein sind, dass sie keine Rolle spielen. Länge der Betonplatte bei 50℃ $\ell = \ell_0 \cdot (1 + \alpha_{Beton} \cdot \Delta\vartheta)$ $\ell = 10\,m \cdot (1 + 12 \cdot 10^{-6}\,K^{-1} \cdot 45\,K)$ $\ell = 10{,}0054\,m$ Die Platte wird um 0,54 cm länger und demnach die Fuge um diesen Wert kleiner. Die neue Fugenbreite beträgt 0,46 cm. (Hinweis: die Fuge wird von zwei Platten gebildet, die sich beide Ausdehnen. Trotzdem muss nur die Ausdehnung einer Platte berücksichtigt werden, da sich die Platte ja nach beiden Seiten ausdehnt. Die berechnete Verkleinerung kommt eigentlich durch die Ausdehnung von 2 Platten um den halben Betrag zustande) $V_2 = b \cdot d \cdot f$ $V_2 = 0{,}46\,cm \cdot 20\,cm \cdot 10\,cm$ $V_2 = 92\,cm^3$ Durch die Erwärmung der Betonplatten verkleinert sich das Volumen um 108 cm³.		

	2. Um welches Volumen dehnt sich der Teer aus? Das Anfangsvolumen entspricht dem Volumen der Fuge bei 5°C, also 200cm³. $V = V_1 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\vartheta)$ $V = 200\,cm^3 \cdot (1 + 55 \cdot 10^{-5}\,K^{-1} \cdot 45\,K)$ $V = 205\,cm^3$ Der Teer dehnt sich um 5 cm³ aus. Damit ergeben sich insgesamt 113 cm³ Teer, der aus der Fuge austritt. Bei der Abkühlung geht der Teer dann wieder in die Fuge hinein.
Antwort:	Es treten 113 cm³ Teer aus.

geg.:	$\vartheta_1 = 20°C$ $\rho_1 = 0{,}99821 \frac{g}{cm^3}$ $\vartheta_1 = 100°C$ $\rho_2 = 0{,}95835 \frac{g}{cm^3}$	ges.:	γ

Lösung:

Es gilt ganz allgemein:

$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T$$

und nach der gesuchten Größe umgestellt:

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta T}$$

Die Temperaturänderung ist mit 80 K bekannt. Über die Volumenänderung und das Ausgangsvolumen müssen noch Aussagen gemacht werden.
Die Dichte hängt mit dem Volumen über

$$\rho = \frac{m}{V}$$

zusammen.
Damit ist das Anfangsvolumen

$$V_0 = \frac{m}{\rho_1}$$

Das bringt uns scheinbar noch nicht weiter, da zwar die Anfangsdichte bekannt, aber die Masse unbekannt sind.
Die Masse kann man aber als konstant betrachten. Wenn eine bestimmte Wassermenge von 20°C auf 100°C erwärmt wird, ändert sich die Dichte im angegebenen Maß, die Masse bleibt dabei konstant.
Die Volumenänderung ist das Endvolumen minus das Anfangsvolumen, also

$$\Delta V = V_2 - V_1$$

oder mit Masse und Dichte

$$\Delta V = \frac{m}{\rho_2} - \frac{m}{\rho_1}$$

Das könnte man nun in die Gleichung zur Berechnung der gesuchten Größe einsetzten, formen es aber vorher noch so um, dass die Masse m alleine steht. Sicher kann man sie dann kürzen.
Also: Erweitern:

$$\Delta V = \frac{m \cdot \rho_1}{\rho_2 \cdot \rho_1} - \frac{m \cdot \rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2}$$

und zusammenfassen, da die Brüche jetzt gleichnamig sind:

$$\Delta V = \frac{m \cdot \rho_1 - m \cdot \rho_2}{\rho_2 \cdot \rho_1}$$

Den Zähler kann man weiter vereinfachen:

$$\Delta V = \frac{m \cdot (\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 \cdot \rho_1}$$

	Das setzt man nun in die Gleichung für den Volumenausdehnungskoeffizienten ein: $\gamma=\frac{\frac{m\cdot(\rho_1-\rho_2)}{\rho_2\cdot\rho_1}}{\frac{m}{\rho_2}\cdot\Delta T}$ Ein Doppelbruch! Man kann den Zähler aber auch mit dem Kehrwert des Nenner multiplizieren und dann sieht es gleich viel freundlicher aus: $\gamma=\frac{m\cdot(\rho_1-\rho_2)}{\rho_2\cdot\rho_1}\cdot\frac{\rho_2}{m\cdot\Delta T}$ Wie man sieht, kürzt sich die Masse raus. $\gamma=\frac{(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\Delta T}$ $\gamma=\frac{(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1\cdot\Delta T}$ Nun einsetzten und rechnen: $\gamma=\frac{\left(0{,}99821\frac{g}{cm^3}-0{,}95835\frac{g}{cm^3}\right)}{0{,}95835\frac{g}{cm^3}\cdot 80K}$ $\gamma=5{,}2\cdot 10^{-4}\frac{1}{K}$
Antwort:	Der Volumenausdehnungskoeffizient ist $5{,}2\cdot 10^{-4}\,K^{-1}$.