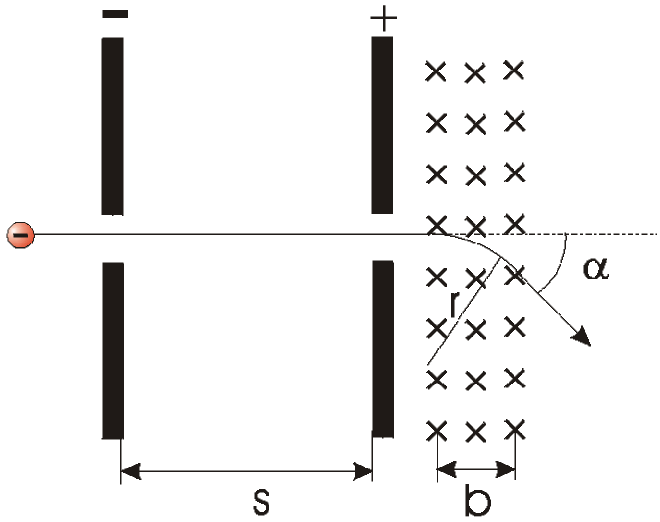
Aufgaben zur Lorentzkraft

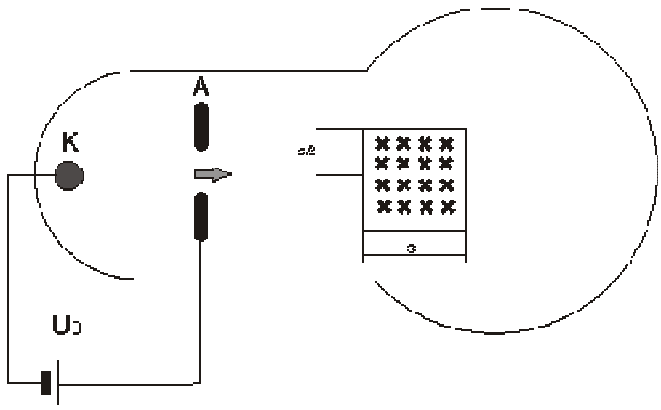
46. Ein Elektronenstrahl tritt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 1{,}96 * 10^6\ ms^{-1}$ senkrecht zu den Feldlinien in ein homogenes Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $B = 1{,}6 * 10^{-3}$ T ein.
a) Erklären Sie, warum sich der Elektronenstrahl auf einer Kreisbahn weiterbewegt.
b) Berechnen Sie den Radius der Kreisbahn.
c) Beschreiben Sie mit Hilfe der in b) hergeleiteten Gleichung, wie sich der Radius ändern würde, wenn an Stelle der Elektronen Protonen in das Magnetfeld fliegen? (qualitativ)

217. Elektronen treten mit der Geschwindigkeit $2{,}0*10^5$ m/s in ein homogenes elektrisches Feld ein und durchlaufen es auf einer Strecke von s = 20 cm. Die Polung der Platten bewirkt, dass die Elektronen beschleunigt werden.
Am Ende der Beschleunigungsstrecke sollen die Elektronen eine Geschwindigkeit von $8{,}0*10^6$ m/s haben.
Anschließend treten die Elektronen senkrecht zu den Feldlinien in ein homogenes Magnetfeld ein, in der sie um □ = 25° zu ihrer Bewegungsrichtung abgelenkt werden sollen. Das Magnetfeld ist b = 3,0 cm breit.



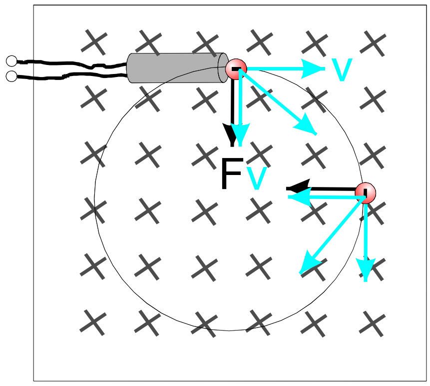
a) Wie groß ist die elektrische Feldstärke des Feldes im Kondensator?
b) Wie groß muss die magnetische Flussdichte sein?

266. Die Abbildung stellt eine Elektronenstrahlröhre mit einem magnetischen Ablenksystem von quadratischem Querschnitt mit der Seitenlänge s = 3 cm dar. Das homogene magnetische Feld verläuft senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen und hat eine magnetische Flussdichte von 20 mT.



a) Welche Geschwindigkeit haben die Elektronen des Elektronenstahls, wenn die Anodenspannung 12 kV beträgt?
Die relativistische Massenveränderlichkeit bleibe unberücksichtigt.
b) Berechnen Sie die kinetische Energie eines Elektrons in eV, nachdem es die Beschleunigungsspannung durchlaufen hat.
c) Wie groß ist der Radius der innerhalb des Magnetfeldes verlaufenden Kreisbahn der Elektronen?
d) Bei der Veränderung der Anodenspannung ändert sich auch der Radius der Kreisbahn der Elektronen.
Stellen Sie den Radius dieser Kreisbahn als Funktion der Beschleunigungsspannung grafisch dar. ($0 \leq U \leq 15$ kV)
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Größen?
Tragen Sie auch Ihre in c) und e) berechneten Werte in das Diagramm ein.
e) Bei welcher Anodenspannung verläuft der das Magnetfeld verlassende Elektronenstrahl senkrecht zum eintretenden Elektronenstrahl?

Lösungen
46.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$v = 1{,}96 \cdot 10^{6}\ \frac{m}{s}$
$B = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ T$</td><td>ges.:</td><td colspan="2">r</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Lösung:</td><td colspan="2">a) Verlässt das Elektron die Beschleunigungsstrecke, würde es sich mit einer konstanten Geschwindigkeit gerade aus weiter bewegen (Trägheitsgesetz). Da sich die Elektronen aber senkrechte zu den Magnetfeldlinien bewegen, die hier von dem Beobachter weg gerichtet sind (vor: N, hinten S), wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung auf die Elektronen eine Kraft. Diese ruft eine zweite Geschwindigkeitskomponente hervor, die nach unten gerichtet ist. Damit bewegt sich das Elektron entsprechend der resultierende Geschwindigkeit schräg nach unten.
Da die Kraft auf das Elektron mit konstanter Größe, aber ständig ändernder Richtung immer senkrecht zu der resultierende Geschwindigkeit wirkt, führt das Elektron eine Kreisbewegung durch.
Die Lorentzkraft wirkt hier als Radialkraft.</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="4">b) Radialkraft = Lorentzkraft
$F_L = F_R$
$\frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B$
$r = \frac{m \cdot v}{e \cdot B}$
$r = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 1{,}96 \cdot 10^{6}\ m \cdot s^{-1}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ T}$
$r = 6{,}96 \cdot 10^{-3}\ m$
$r = 6{,}96\,mm$

c) Da in der oben stehenden Gleichung nur die Masse größer wird, alle andern Größen aber konstant bleiben, wird der Radius auch größer.
Physikalisch gesehen bedeutet dass, dass die Protonen träger sind, mehr Masse haben und damit einen größeren Bogen beschreiben.</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="4">Der Radius der Elektronenbahn beträgt 6,96 mm.</td></tr>
</table>

217.

geg.:		ges.:	
	$v_0 = 2{,}0 \cdot 10^5 \ \frac{m}{s}$ $s = 2 \cdot 10^{-1}\ m$ $v_E = 8{,}0 \cdot 10^6\ \frac{m}{s}$ $\alpha = 25°$ $b = 3 \cdot 10^{-2}\ m$		a) E b) B

Lösung:

a) Die Elektronen kommen mit einer Anfangsgeschwindigkeit in den Kondensator geflogen. Sie besitzen also bereits kinetische Energie. Durch die Beschleunigung im Inneren des Kondensators erhöht sich diese Energie. Dazu wird an den Elektronen Arbeit verrichtet. Die dazu notwendige Energie wird vom elektrischen Feld aufgebracht. Der Ansatz lautet also:
Energie des elektrischen Feldes = Energieänderung der Elektronen.

Wie groß ist die Änderung der kinetischen Energie?

$$\Delta E_{kin} = E_{kinE} - E_{kin0}$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{m_e}{2} \cdot v_E^2 - \frac{m_e}{2} \cdot v_0^2$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{m_e}{2} \cdot \left(v_E^2 - v_0^2\right)$$

Also gilt:

$$e \cdot U = \frac{m_e}{2} \cdot \left(v_E^2 - v_0^2\right)$$

Die Spannung ist die am Kondensator anliegende Spannung. Damit erhält man über

$$E = \frac{U}{s}$$

$$U = E \cdot s$$

dann

$$e \cdot E \cdot s = \frac{m_e}{2} \cdot \left(v_E^2 - v_0^2\right)$$

$$E = \frac{m_e}{2 \cdot e \cdot s} \cdot \left(v_E^2 - v_0^2\right)$$

$$E = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ m} \cdot \left(64{,}0 \cdot 10^{12}\ m^2\ s^{-2} - 5 \cdot 10^{10}\ m^2\ s^{-2}\right)$$

$$E = 9{,}09 \cdot 10^2\ V \cdot m^{-1}$$

Einheiten:

$$[E] = \frac{kg}{C \cdot m} \cdot m^2\ s^{-2} = \frac{kg}{A \cdot s} \cdot m \cdot s^{-2} = \frac{kg \cdot m}{A \cdot s^3} = \frac{N}{A \cdot s}$$

$$[E] = \frac{N \cdot m}{A \cdot s \cdot m} = \frac{W \cdot s}{A \cdot s \cdot m} = \frac{V \cdot A \cdot s}{A \cdot s \cdot m} = \frac{V}{m}$$

b) Im homogenen Magnetfeld bewegen sich Elektronen, die senkrecht zu den Feldlinien in das Feld eintreten, auf einer Kreisbahn. Die dazu notwendige Radialkraft wird von der Lorentzkraft aufgebracht. Es gilt:

$$F_L = F_R$$

$$e \cdot v_E \cdot B = \frac{m_e \cdot v_E^2}{r}$$

$$B = \frac{m_e \cdot v_E^2}{e \cdot v_E \cdot r}$$

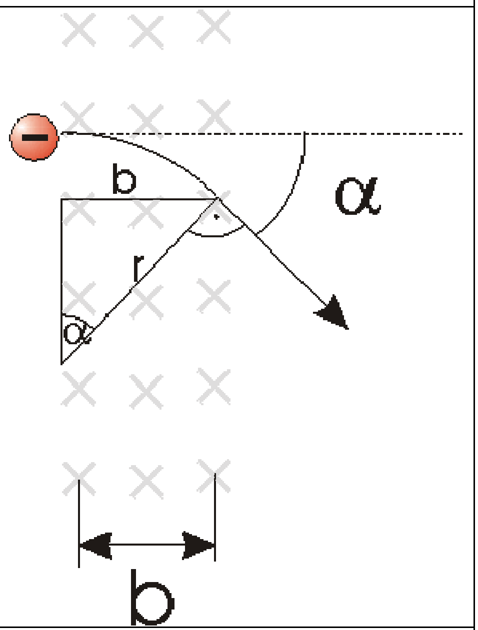
$$B = \frac{m_e \cdot v_E}{e \cdot r}$$

Der Radius der Kreisbahn ist unbekannt. Wir kennen aber den Winkel, unter dem die Elektronen abgelenkt werden sollen. Da der Radius senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor steht, lässt sich ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren. Es gilt:

$$\sin\alpha = \frac{b}{r}$$

$$r = \frac{b}{\sin\alpha}$$

Damit kann nun die magnetische Flussdichte berechnet werden:



$$B = \frac{m_e \cdot v_E}{e \cdot r}$$

$$B = \frac{m_e \cdot v_E \cdot \sin\alpha}{e \cdot b}$$

$$B = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 8{,}0 \cdot 10^{6}\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \sin 25°}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 3 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}$$

$$B = 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{T}$$

$$B = 0{,}64\,\text{mT}$$

Einheiten:

$$[B] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

$$[B] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{T}$$

Antwort:	Die elektrische Feldstärke ist 910 V/m und die magnetische Flussdichte 0,64 mT groß.

266.

geg.:	$s=3\cdot 10^{-2}\ \text{m}$ $B=20\cdot 10^{-2}\ \text{T}$ $U_B=12\cdot 10^{3}\ \text{V}$	ges.:	a) v
Lösung:	a) Die Elektronen gewinnen ihre kinetische Energie aus der Energie des elektrischen Feldes: $U\cdot e=\frac{m}{2}\cdot v^2$ $v=\sqrt{\frac{2\cdot U_B\cdot e}{m_e}}$ $v=\sqrt{\frac{2\cdot 12\cdot 10^3\ \text{V}\cdot 1{,}6022\cdot 10^{-19}\ \text{C}}{9{,}1095\cdot 10^{-31}\ \text{kg}}}$ $v=64{,}9\cdot 10^6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ b) Zur Berechnung der kinetischen Energie gibt es zwei Möglichkeiten: entweder über die Gleichung der kinetischen Energie $E_{kin}=\frac{m}{2}\cdot v^2$ oder über die Energie des elektrischen Feldes. Beim Durchlaufen von einer Spannung von 1 V erhält ein Elektron eine Energie von 1 eV. Damit hat es nach dem Durchlaufen der Strecke zwischen Katode und Anode eine kinetische Energie von 12 keV. c) Fliegt das Elektron in das Magnetfeld ein, spürt es senkrecht zu seiner Flugrichtung die Lorentzkraft. Da es dadurch seine Flugrichtung ändert, ändert auch die Lorentzkraft ihre Richtung. Die Folge davon ist, dass die Lorentzkraft immer senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons wirkt und es auf eine Kreisbahn zwingt. Die Lorentzkraft wirkt als Radialkraft. $F_L=F_R$ $e\cdot v\cdot B=\frac{m\cdot v^2}{r}$ $r=\frac{m\cdot v}{e\cdot B}$ $r^2=\frac{m^2\cdot v^2}{e^2\cdot B^2}$ $r^2=\frac{m^2\cdot 2\cdot e\cdot U}{e^2\cdot B^2\cdot m}$ $r^2=\frac{2\cdot m\cdot U}{e\cdot B^2}$ $r=\sqrt{\frac{2\cdot m\cdot U}{e\cdot B^2}}$ $r=\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}1095\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot 12\cdot 10^3\ \text{V}}{1{,}6022\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 4\cdot 10^{-4}\ \text{T}^2}}$ $r=0{,}0185\ \text{m}$ $r=18{,}5\ \text{mm}$		

d) Die in c) gewonnene Gleichung kann zur Darstellung des Zusammenhangs verwendet werden:

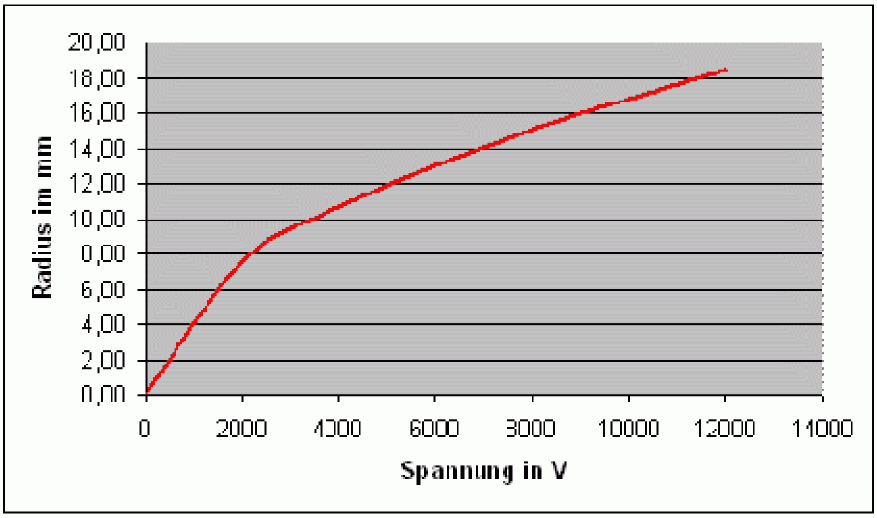
$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot U}{e \cdot B^2}}$$

$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot m}{e \cdot B^2}} \cdot \sqrt{U}$$

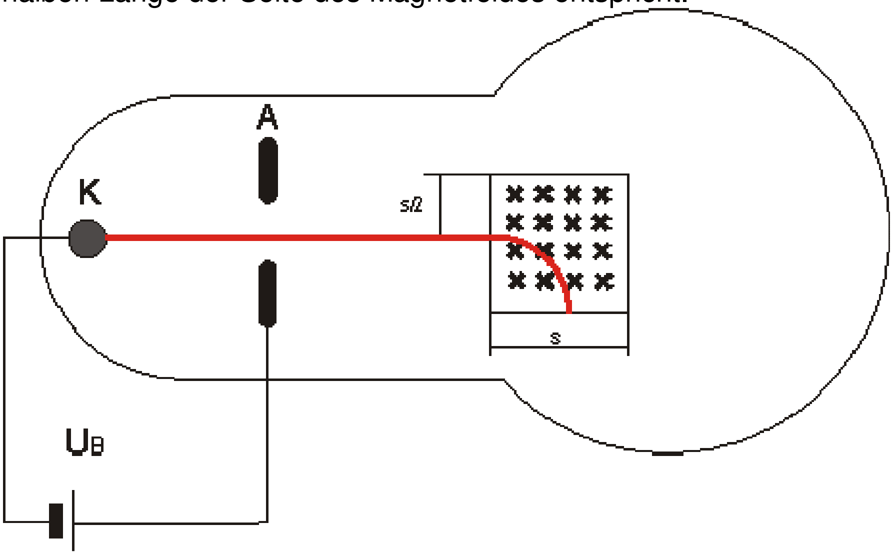
Der erste Faktor enthält nur konstante Größen, so dass gilt:

$$r \sim \sqrt{U}$$

Es kann eine Werttabelle aufgestellt werden.



e) Der Elektronenstrahl wird um 90° abgelenkt, wenn er einen Radius fliegt, der der halben Länge der Seite des Magnetfeldes entspricht.



	Die in c) erstellte Gleichung wird nach U umgestellt: $r=\sqrt{\frac{2\cdot m\cdot U}{e\cdot B^2}}$ $r^2=\frac{2\cdot m\cdot U}{e\cdot B^2}$ $U=\frac{r^2\cdot e\cdot B^2}{2\cdot m}$ $U=\frac{2{,}25\cdot 10^{-4}\ m\cdot 1{,}6022\cdot 10^{-19}\ C\cdot 4\cdot 10^{-4}\ T}{2\cdot 9{,}1095\cdot 10^{-31}\ kg}$ $U=7915\ V$
Antwort:	Die Elektronen haben eine Geschwindigkeit von 64,9 $*10^6$ m/s. Nach dem Durchlaufen der Beschleunigungsspannung hat das Elektron eine Energie von 12 keV. Innerhalb des Magnetfeldes fliegt das Elektron auf einem Kreis mit 18,5 mm Radius. Der Radius der Kreisbahn ist proportional zur Wurzel der Beschleunigungsspannung. Bei einer Beschleunigungsspannung von 7915 V tritt der Elektronenstrahl senkrecht aus dem Magnetfeld aus.