Aufgaben Schwingungen

1. An einem Fadenpendel hängt eine Masse von 1 kg und schwingt. Geben Sie die Rückstellkräfte bei den folgenden 2 Auslenkwinkeln an:
a) $\alpha = 5°$
b) $\beta = 20°$

2. Ein Körper der Masse 2 kg hängt an einer Feder mit der Federkonstanten D = 8 N/m. Seine maximale Auslenkung aus der Ruhelage beträgt 20 cm. Welchen Abstand zur Ruhelage besitzt die schwingende Masse
a) 1,0 s?
b) 2,0 s?
c) 3,0 s?
nach Durchschwingen der Ruhelage?

3. Ein Fadenpendel der Länge 40 cm wird um 12 cm ausgelenkt und losgelassen.
a) Bestimmen Sie seinen Abstand zur Ruhelage, seinen Geschwindigkeitsbetrag und seinen Beschleunigungsbetrag 10 Sekunden nach dem Loslassen durch die Ruhelage. (Die Bewegung sei reibungsfrei.)
b) Zeichnen Sie für die Elongation, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung für die ersten 2 Sekunden der Schwingung das entsprechende Diagramm.

4. Hängt man zusätzlich an das Massenstück eines Federpendels der Federkonstanten D=10N/m einen Körper der Masse 50g, erhöht sich die Schwingungsdauer um 0,22s. Wie groß ist die ursprüngliche Masse?

Lösungen

1.

geg.:	$m = 1\,kg$ $\alpha = 5°$ $\beta = 20°$	ges.:	F_r

Lösung:

Eine Schwingung kann nur dann stattfinden, wenn es eine Kraft gibt, die den Körper zum Ruhepunkt zurückbringen will. Beim Pendel ist das eine Teil der Gewichtskraft, je größer der Auslenkwinkel, um so größer ist auch die rücktreibende Kraft. Befindet sich das Pendel genau im Ruhepunkt, also unten, ist die rücktreibende Kraft Null.

Die gesuchte Kraft ergibt sich aus einem Kräfteparallelogramm. Die Diagonale des Rechtecks entspricht der Gewichtskraft F_G. Sie teilt sich auf in eine rücktreibende Kraft Fr und die Kraft, die der Faden spürt (Fadenkraft F_F).
Der Auslenkwinkel Alpha taucht zweimal in diesem Rechteck auf. Damit ergibt sich folgender Zusammenhang:

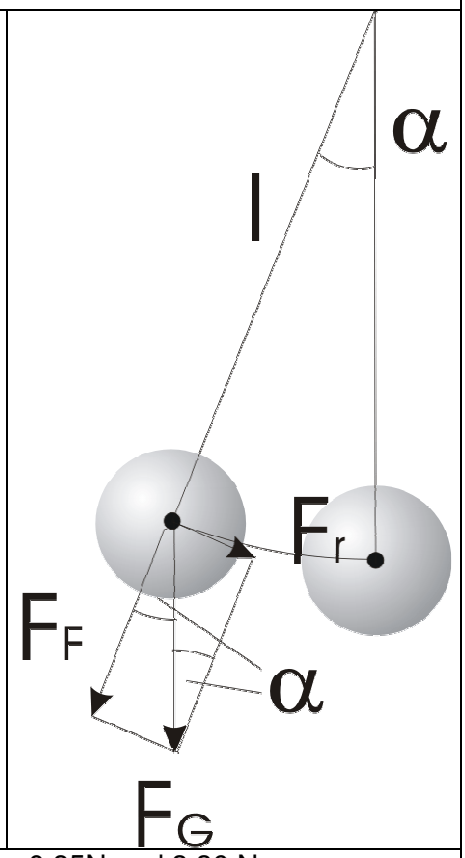
$$\sin\alpha = \frac{F_r}{F_G}$$

$$F_r = \sin\alpha \cdot F_G$$

$$F_r = \sin 5° \cdot 1\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$$

$$F_r = 0{,}85\,N$$

Für einen Auslenkwinkel von 20° ergibt sich eine rücktreibende Kraft von 3,36 N



Antwort: Die rücktreibenden Kräfte betragen 0,85N und 3,36 N.

2.

geg.:	$m = 2\,kg$ $D = 8\,\frac{N}{m}$ $\hat{y} = 20\,cm$ $t_1 = 1\,s$ $t_2 = 2\,s$ $t_3 = 3\,s$	ges.:	y_1, y_2, y_3

Lösung:	Die Elongationen berechnen sich nach der Gleichung für die harmonische Schwingung: $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ Die Kreisfrequenz kann extra berechnet werden: $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}}$ $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{0{,}25\,s^2}}$ $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\,s}$ $\omega = 2\,s^{-1}$ Damit wird: $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ $y_1 = 20\,cm \cdot \sin(2\,s^{-1} \cdot 1s)$ $y_1 = 18{,}2\,cm$ $y_2 = -15{,}14\,cm$ $y_3 = -5{,}6\,cm$ Das negative Vorzeichen vor den letzten beiden Ergebnissen macht eine Aussage über die Seite bezüglich des Umkehrpunktes.
Antwort:	Nach1 s ist der Körper 18,2 cm über dem Umkehrpunkt. Nach 2 s ist er 15,1 cm und nach 3 s 5,6 cm unter dem Umkehrpunkt.

3.

geg.:	$l = 0{,}4\,m$ $\hat{y} = 0{,}12\,m$ $t = 10\,s$	ges.:	y, v, a

Lösung:

Zuerst muss die Schwingungsdauer berechnet werden:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}4\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}$$

$$T = 1{,}269\,s$$

Wenn das Pendel bei einem Abstand von 12 cm von der Ruhelage losgelassen wird, erreicht es nach 1,269s/4=0,3171 s die Ruhelage. In der Schwingungsgleichung muss diese Zeit berücksichtigt werden und zu den 10 s hinzugezählt werden.
Auf der anderen Seite haben die Elogationen dann negative Werte. Damit lässt sich über die Gleichung der harmonischen Schwingung die Elongation berechnen. (Hinweis: Taschenrechner in den Modus Radiant umschalten)

$$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$y = \hat{y} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \frac{T}{4}\right)$$

$$y = 0{,}12\,m \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{1{,}269\,s} \cdot (10\,s + 0{,}3171\,s)\right)$$

$$y = 0{,}088\,m$$

$$y = 8{,}8\,cm$$

Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des Weges (y) nach der Zeit:

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$v = \hat{y} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$v = \hat{y} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{1{,}269\,s} \cdot (10\,s + 0{,}3171\,s)\right)$$

$$v = 0{,}406\,\frac{m}{s}$$

Die Beschleunigung ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit:

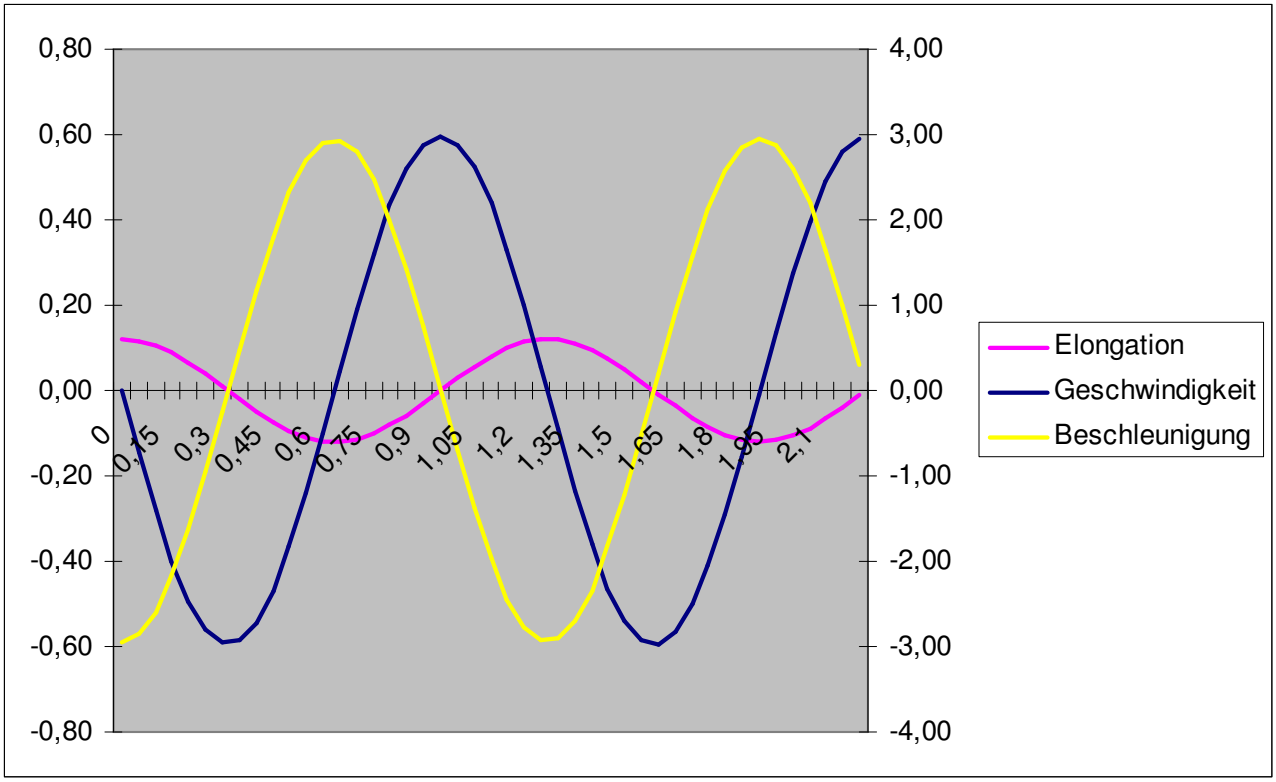
$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = -\hat{y} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$a = -\hat{y} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \left(t + \frac{T}{4}\right)\right)$$

$$a = -2{,}17\,\frac{m}{s^2}$$

Antwort: Das Pendel ist nach 10 s 9 cm vom Ruhepunkt auf der Startseite entfernt. Dort hat es noch eine Geschwindigkeit von 0,41 m/s. Die Beschleunigung beträgt -2,17 m/s². Das bedeutet, es ist kurz vor dem Umkehrpunkt und bremst ab.


0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
-0,20
-0,40
-0,60
-0,80
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
-1,00
-2,00
-3,00
-4,00
0
0,15
0,3
0,45
0,6
0,75
0,9
1,05
1,2
1,35
1,5
1,65
1,8
1,95
2,1
Elongation
Geschwindigkeit
Beschleunigung

4.

geg.:	$D = 10\,\frac{N}{m}$ $m_2 = 50 \cdot 10^{-3}\,kg$ $\Delta T = 0{,}22\,s$	ges.:	m_1

Lösung:

Es lassen sich die Schwingungsdauern mit Hilfe der Gleichung für das Federpendel angeben:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D}}$$

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}}$$

Weiterhin ist bekannt:

$$T_2 = T_1 + \Delta T$$

In die letzte Gleichung werden die beiden ersten eingesetzt:

$$2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D}} + \Delta T$$

In dieser Gleichung ist außer der gesuchten Masse alles bekannt. Also umstellen.

$$2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D}} + \Delta T \qquad |: 2\pi$$

$$\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D}} + \Delta T}{2\pi} \qquad |^2$$

$$\frac{m_1 + m_2}{D} = \frac{\left(2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D}} + \Delta T\right)^2}{4\pi^2} \qquad |\text{Kreuzprodukt}$$

$$4\pi^2 \cdot (m_1 + m_2) = D \cdot \left(2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D}} + \Delta T\right)^2$$

	Jetzt wird auf der rechten Seite die binomische Formel ausgerechnet und alle Klammern ausmultipliziert: $4\pi^2 \cdot m_1 + 4\pi^2 \cdot m_2 = 4\pi^2 m_1 + 4\pi\, D\Delta T\sqrt{\frac{m_1}{D}} + D\Delta T^2 \qquad |-4\pi^2 m_1$ $4\pi^2 \cdot m_2 = 4\pi\, D\Delta T\sqrt{\frac{m_1}{D}} + D\Delta T^2 \qquad |-D\Delta T^2$ $4\pi^2 \cdot m_2 - D\Delta T^2 = 4\pi\, D\Delta T\sqrt{\frac{m_1}{D}} \qquad |:4\pi\, D\Delta T$ $\frac{4\pi^2 \cdot m_2 - D\Delta T^2}{4\pi\, D\Delta T} = \sqrt{\frac{m_1}{D}} \qquad |^2$ $\frac{\left(4\pi^2 \cdot m_2 - D\Delta T^2\right)}{16\pi^2\, D^2\, \Delta T^2} = \frac{m_1}{D} \qquad |\cdot D$ $m_1 = \frac{\left(4\pi^2 \cdot m_2 - D\Delta T^2\right)}{16\pi^2\, D\Delta T^2}$ Setzt man die gegebenen Größen ein, erhält man eine Masse von 30 g.
Antwort:	Die ursprüngliche Masse war 30 g groß.

Die konventionelle Lösung erfordert einen gewaltigen Aufwand an Umstellungen. Da macht es sich besser, die Zielwertsuche von Excel zur Bestimmung der gesuchten Masse zu verwenden.
In der konventionellen Lösung erhält man recht zügig diese Gleichung:

$$2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D}} + \Delta T$$

In dieser Gleichung ist alles außer der Masse m_1 gegeben. Man kann nun einfach die linke Seite subtrahieren und erhält:

$$0 = \left(2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D}} + \Delta T\right) - 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}}$$

Diese Gleichung gibt man in Excel ein.
Ähnliches geht mit dem Taschenrechner.