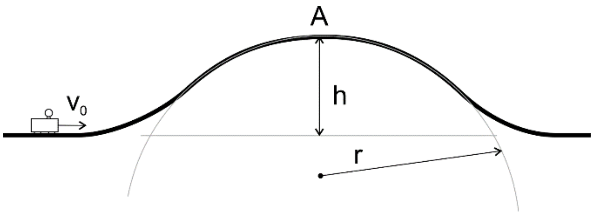
Kontrolle Physik-Leistungskurs Klasse 11
1.11.2024
Drehbewegung, Radialkraft
Hilfsmittel: IQB-Formelsammlung, Taschenrechner)
Dauer: 45 min

1. Auf einer Achterbahn rollen die Wagen über einen Berg, der im oberen Teil die Form eines Kreises mit 32 m Radius hat. Die Höhe h des Berges beträgt 11,0 m.
Der Wagen soll im oberen Punkt A eine Geschwindigkeit von 15 m/s haben.



a) Welche Anfangsgeschwindigkeit braucht der Wagen am Fuß des Berges? Die Bewegung nach oben wird zur Vereinfachung reibungsfrei betrachtet. (3)

b) Wie groß darf die Anfangsgeschwindigkeit maximal sein, damit der Wagen im oberen Punkt nicht abhebt? (5)

c) Vergleichen Sie die beiden Geschwindigkeiten und beschreiben Sie, was die Personen im Punkt A spüren. (2)

2. Ein Kettenkarussell ist am frühen Nachmittag zur Eröffnung des Jahrmarktes nur halb besetzt, ein Teil der Gondeln sind leer. Wenn sich das Karussell dreht, bewegen sich die Gondeln aus der Senkrechten weg nach außen und bilden mit dem Lot einen Winkel.
Zeigen Sie mit Hilfe einer Skizze, dass die leeren und die besetzten Gondeln alle um den gleichen Winkel ausgelenkt werden.(5)

3. Die Kurve einer Rennbahn soll bei einem Kurvenradius von 50 m für die Geschwindigkeit 36 km/h gebaut werden. Welche Neigung der Bahn ist optimal? (4)

4. Die beiden Gleichungen beschreiben die Größe der Radialkraft in Abhängigkeit von den Bahnparametern einer gleichförmigen Kreisbewegung.

$$F_R = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$F_R = m \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{m \cdot 4\pi^2 \cdot r}{T^2}$$

Geben sie für die unten beschriebenen Fälle an, wie sich die Größe der Radialkraft verändern muss, wenn sich der entsprechende Bahnparameter ändert. (4)

a) Bei konstanter Masse und konstantem Bahnradius wird die Bahngeschwindigkeit vervierfacht.

b) Bei konstanter Masse und konstanter Bahngeschwindigkeit wird der Bahnradius verdoppelt.

c) Bei konstanter Masse und konstanter Umlaufzeit wird der Bahnradius verdoppelt.

d) Bei konstantem Bahnradius werden Masse und Umlaufzeit halbiert.

Lösungen

1.
a) Die gesuchte Geschwindigkeit erhält man über eine Energiebetrachtung. Am Fuß des Berges hat der Wagen kinetische Energie. Beim Hochrollen wird diese Energie zum Teil in potenzielle Energie umgewandelt, da der Wagen ja angehoben wird.
Es gilt also:

$$E_{kin/0} = E_{pot/A} + E_{kin/A}$$

Die gegebene Höhe steckt in der potenziellen Energie, die gegebene Geschwindigkeit in der kinetischen Energie in A und die gesuchte Geschwindigkeit ist in der kinetischen Geschwindigkeit am Fuß des Berges.

$$\frac{m}{2} \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{m}{2} \cdot v_A^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_0^2 = g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot v_A^2$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h + v_A^2}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 11{,}0\,m + \left(15 \frac{m}{s}\right)^2}$$

$$v_0 = 21{,}0 \frac{m}{s}$$

b) Im oberen Punkt wirken auf den Wagen zwei Kräfte: die nach unten zeigenden Gewichtskraft und die nach außen zeigende Zentrifugalkraft. Der Wagen hebt dann nicht ab, wenn die Zentrifugalkraft nicht größer wird als die Gewichtskraft. Die Grenze liegt bei der Gleichheit der Beträge beider Kräfte. Dann würde der Wagen gerade so schwerlos durch den oberen Punkt gleiten.

$$F_G = F_Z$$

$$m \cdot g = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$g = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{g \cdot r}$$

Wie man sieht, spielen die Masse des Wagens oder der darinsitzenden Personen keine Rolle, alle kommen über den Berg.
Es ist jedoch nicht die Geschwindigkeit im oberen Punkt gefragt, sondern die Anfangsgeschwindigkeit.
Man nimmt die in a) hergeleitete Gleichung und setzt die Geschwindigkeitsgleichung ein:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h + g \cdot r}$$

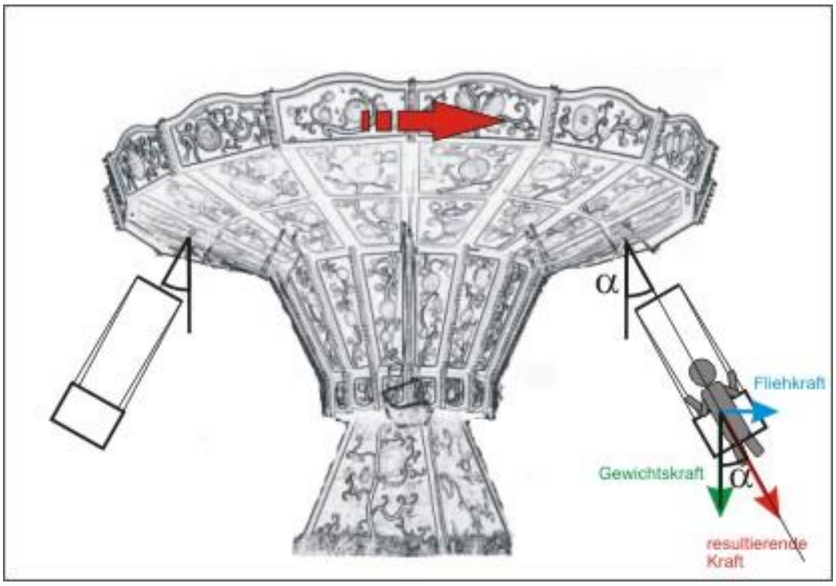
$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 11m + 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 32\,m}$$

$$v_0 = 23{,}0 \frac{m}{s}$$

Das ist die maximale Geschwindigkeit, die der Wagen am Fuß des Berges haben darf. Man sieht, dass die bei a) berechnete Geschwindigkeit nur etwas kleiner ist. Die Personen spüren also am oberen Punkt fast den Zustand der Schwerelosigkeit.

3. Bei der Bewegung des Karussells wirken auf die Gondel zwei Kräfte: Die nach außen treibende Fliehkraft und die nach unten ziehende Gewichtskraft. Die sich daraus ergebende resultierende Kraft wirkt auf die Aufhängung und zieht sie genau in diese Richtung.
Der zu untersuchende Auslenkwinkel taucht nach den Gesetzten der Geometrie zwischen der Gewichtskraft und der resultierenden Kraft noch mal auf. Für ihn gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\text{Fliehkraft}}{\text{Gewichtskraft}}$$



Für die Kräfte werden jetzt die bekannten Gleichungen eingesetzt:

$$\tan\alpha = \frac{m \cdot v^2}{r \cdot m \cdot g}$$

Und Überraschung: die Masse kürzt sich raus:

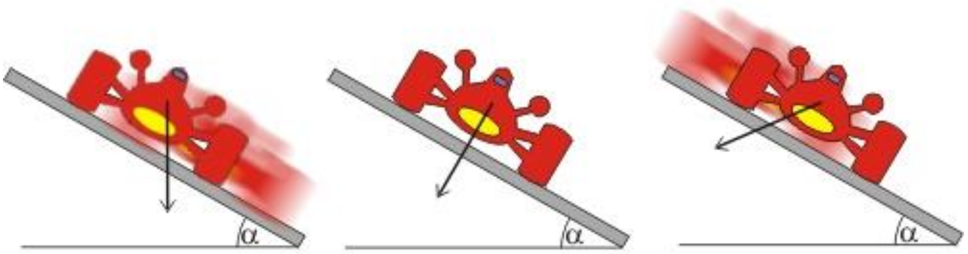
$$\tan\alpha = \frac{v^2}{r \cdot g}$$

Der Auslenkwinkel hängt nur von der Geschwindigkeit und dem Abstand vom Drehzentrum ab. Damit schwingen sie leere und die besetzte Gondel gleich hoch.

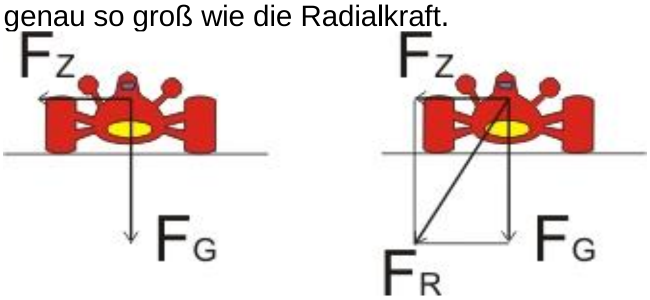
3. geg.:	$r = 50\,m$ $v = 36\,\frac{km}{h}$	ges.:	α

Lösung:

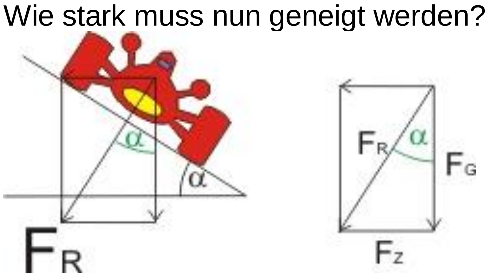
Optimale Kurvenneigung heißt, dass das Fahrzeug ohne Reibung mit dieser Geschwindigkeit durch die Kurve fahren kann.
Dabei ist wichtig, wie das Auto auf die Unterlage wirkt. Nur wenn die resultierende aller Kräfte senkrecht auf den Boden drückt, bleibt es in der Kurve. Ansonsten kann es nach oben oder nach unten wegrutschen.



Fährt das Auto in eine Kurve, spürt es zwei Kräfte: Die senkrecht nach unten wirkende Gewichtskraft F_G und die senkrecht zum Erdboden nach außen wirkende Zentrifugalkraft F_Z. Diese ist eine Trägheitskraft und vom Betrag her genau so groß wie die Radialkraft.



Beide Kräfte zusammen ergeben eine resultierende Kraft F_R, die schräg nach unten zeigt.
Ohne jegliche Reibung würde diese Kraft das Auto aus der Kurve tragen. Durch die Reibung zwischen Rädern und Straße bleibt es aber in der Kurve.
Optimal wäre es, wenn die Kraft senkrecht auf den Untergrund wirken würde. Dann spürt auch der Fahrer keine Seitenkräfte, was es für ihn wesentlich angenehmer macht.
Wie stark muss nun geneigt werden?



Der Winkel zwischen Boden und Straße taucht, wie in der Zeichnung zu sehen, in dem Kräfteparallelogramm auf. Da ein schönes rechtwinkliges Dreieck vorliegt, gilt:

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G}$$

	Damit lässt sich der gesuchte Winkel berechnen: $\tan\alpha = \frac{m \cdot v^2}{r \cdot m \cdot g}$ $\tan\alpha = \frac{v^2}{r \cdot g}$ $\tan\alpha = \frac{\left(10\frac{m}{s}\right)^2}{50\,m \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}$ $\alpha = 11{,}5°$
Antwort:	Die optimale Bahnneigung beträgt 11,5°.

4. Für jeden einzelnen Fall muss entschieden werden, welche der beiden Formeln zutrifft.

a) Den Zusammenhang zwischen Radialkraft und Bahngeschwindigkeit beschreibt die erste Formel. Sind die Masse und der Bahnradius konstant, gilt

$F_R \sim v^2$

Wird die Bahngeschwindigkeit vervierfacht, muss sich die **Radialkraft um das Sechzehnfache erhöhen**, um den Körper noch auf dieser Bahn zu halten.

b) Auch hier kann die erste Formel verwendet werden. Bei konstanter Masse und Bahngeschwindigkeit gilt

$F_R \sim \frac{1}{r}$

Wird der Radius verdoppelt, ist nur noch die **halbe Radialkraft** notwendig, um den Körper auf der Bahn zu halten.

c) Es wird jetzt die zweite Formel verwendet. Da Masse und Umlaufzeit konstant sind, gilt

$F_R \sim r$

Eine Verdopplung des Bahnradius bedeutet also eine **Verdopplung der notwendigen Radialkraft**.

Das widerspricht auf den ersten Blick der Aussage von Aufgabe b. Wenn die Umlaufzeit aber konstant bleibt, muss sich die Bahngeschwindigkeit vergrößert werden.

d) Für die letzte Aufgabe kommt wieder die zweite Formel zum Einsatz. Es bleibt nur der Bahnradius konstant, also gilt

$F_R \sim \frac{m}{T^2}$

Eine Halbierung der Masse bringt eine Halbierung der Radialkraft mit sich. Durch die Halbierung der Umlaufzeit wird die Kreisbewegung aber deutlich schneller, was auf Grund des Quadrates eine Vervierfachung der Radialkraft bewirkt.

Damit muss im Endeffekt die **Radialkraft verdoppelt** werden.